X Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap drugi - 23 lutego 2018 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej - do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z "Zestawu wybranych wzorów matematycznych" wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4.) zostaje on wykluczony z Konkursu.

ZADANIE 1 (10 pkt.).

Długości boków trójkąta spełniają warunek $a \geq b \geq c$. Niech R oraz r będą długościami promieni okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

Zadania do wykonania (8p + 2p):

(I) Wykazać, że $bc \leq 6Rr \leq a^2$.

(II) Stwierdzić, przy jakiej zależności pomiędzy długościami boków zachodzi $bc = 6Rr = a^2$.

ZADANIE 2 (10 pkt.).

Zadania do wykonania (5p + (3p+2p)):

(I) Znajdź największy ujemny pierwiastek równania

$$3 + 2\sin x + \cos\frac{2x}{3} = 0.$$

(II) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie

$$\cos 2x + a\sin x = 2a - 7$$

ma rozwiązanie? Rozwiąż to równanie dla najmniejszej możliwej wartości parametru a.

ZADANIE 3 (6 pkt.).

Wykazać, że jeśli $a + b = 1$, to $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 4 (10 pkt.).

Niech Ω będzie skończonym zbiorem, tj. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$ dla pewnego $d \in \mathbb{N}$. Elementy zbioru Ω nazywamy *zdarzeniami elementarnymi*, zaś dowolny podzbiór $A \subset \Omega$ nazywamy *zdarzeniem*. Zakładamy, że każde zdarzenie elementarne jest jednakowo prawdopodobne. W związku z tym prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się następującym wzorem

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie $|B|$ oznacza moc zbioru B albo inaczej ilość elementów zbioru $B \subset \Omega$.

DEFINICJA 1. Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, są *niezależne*, jeśli zachodzi poniższa równość

$$\mathsf{P}\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\big) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \mathsf{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_{i_k})$$

dla wszystkich $k = 2, \ldots, n$ i wszystkich $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

DEFINICJA 2. Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są *parami niezależne*, jeżeli dla dowolnych różnych $i, j \in \{1, ..., n\}$ mamy

$$\mathsf{P}\big(A_i \cap A_j\big) = \mathsf{P}(A_i) \cdot \mathsf{P}(A_j).$$

Jest jasne, że jeżeli zdarzenia są niezależne, to są również parami niezależne. Implikacja w drugą stronę nie musi zachodzić, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 3. (Bernstein, 1928) Rozważmy urnę, w której znajdują się cztery kule ponumerowane następująco: 112, 121, 211 i 222. Losujemy jedną kulę, więc zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać $\Omega = \{(112), (121), (211), (222)\}$. Niech A_1 oznacza zdarzenie "wylosowano kulę o numerze rozpoczynającym się od jedynki", A_2 - "wylosowano kulę o numerze, w której druga cyfra jest jedynką", zaś A_3 - "wylosowano kulę o numerze, w której trzecia cyfra jest jedynką". Mamy

$$\mathsf{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = 0,5$$

dla $i = 1, 2, 3$ oraz $\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathsf{P}(A_1 \cap A_3) = \mathsf{P}(A_2 \cap A_3) = 0,25$. Oznacza, to że zdarzenia A_1, A_2, A_3 są parami niezależne. Ale

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq 0,125 = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2) \cdot \mathsf{P}(A_3),$$

więc zdarzenia A_1, A_2, A_3 nie są niezależne.

Zadania do wykonania (2p + 4p + 4p):

(I) W urnie znajduje się jedna kula biała oraz jedna czarna. Losujemy trzy razy jedną kulę ze zwrotem. Niech A oznacza zdarzenie "wylosowano co najwyżej jedną kulę czarną", zaś B oznacza "wylosowano wszystkie kule tego samego koloru". Sprawdzić, czy zdarzenia A i B są niezależne.

(II) Rozważmy następujący zbiór zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{(a, b, c), (a, c, b), (c, a, b), (c, b, a), (b, a, c), (b, c, a), (a, a, a), (b, b, b), (c, c, c)\}.$$

Niech A_k, $k = 1, 2, 3$, oznacza zdarzenie polegające na tym, że na k-tym miejscu znajduje się litera a. Pokazać, że zdarzenia A_1, A_2, A_3 są parami niezależne, ale nie są niezależne.

(III) Niech A_1, A_2, A_3 będą zdarzeniami takimi, że

$$\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathsf{P}(A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2) \cdot \mathsf{P}(A_3).$$

Czy zdarzenia A_1, A_2, A_3 są parami niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5 (18 pkt.).

Równanie funkcyjne to równanie, w którym występują funkcje i zmienne, a niewiadomą jest funkcja. Zmienne zazwyczaj są dowolnymi elementami dziedziny. Zakres wartości zmiennych zwykle zapisujemy po prawej stronie równania. Rozwiązanie równania funkcyjnego polega na wyznaczeniu wszystkich funkcji, które je spełniają. W tym celu stosujemy różnorakie podstawienia wartości zmiennych występujących w równaniu. Rozwiązaniem równania funkcyjnego jest więc zbiór funkcji.

Przykład 1. Wyznaczymy wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne:

$$2f(x+y) - f(2x) - 4f(y) = 2(x-y)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Rozwiązanie: Podstawmy $x = 0$ i $y = 0$ w równaniu (1) dostając:

$$2f(0+0) - f(0) - 4f(0) = 2(0-0)^2 = 0.$$

Wnioskujemy stąd, że $f(0) = 0$. Teraz wstawmy w (1) $y = x$:

$$2f(2x) - f(2x) - 4f(x) = 2(x-x)^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

czyli

$$f(2x) = 4f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Z kolei, podstawienie $y = 0$ w równaniu (1) prowadzi do:

$$2f(x-0) - f(2x) - 4f(0) = 2(x-0)^2 = 2x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

czyli

$$f(2x) = 2f(x) - 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Równości (2) i (3) po przyrównaniu do siebie i podzieleniu stronami przez 2 dają nam kolejny związek:

$$f(x) = -x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Jest to szukana postać funkcji f. Teraz należy sprawdzić, że funkcja dana wzorem (4) spełnia równanie (1). To jest łatwym przeliczeniem:

$$-2(x+y)^2 + (2x)^2 + 4y^2 = 2(x-y)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Odpowiedź: Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie (1) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = -x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Przykład 2. Wyznaczymy wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne:

$$f(f(x+y)+x) = y, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Rozwiązanie: Podstawmy $x = 0$:

$$f(f(y)) = f(f(0+y)+0) = y, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Zauważmy, że z równości (6) wynika, że funkcja f jest odwracalna oraz $f = f^{-1}$. Teraz podstawmy w (5) $y = 0$:

$$f(f(x)+x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mamy stąd:

$$f(f(f(x)+x)) = f(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponieważ $f = f^{-1}$, więc

$$f(x) + x = f(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Oznaczając $c = f(0)$ dostajemy:

$$f(x) = -x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Łatwo jest sprawdzić, że dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$ funkcja powyższej postaci spełnia równanie (5). Odpowiedź: Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie (5) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała $c \in \mathbb{R}$, że

$$f(x) = -x + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zadania do wykonania (8p + 10p):

(I) Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne:

$$f(x+2y) + 1 + y = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(II) Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne:

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 6 (15 pkt.).

Definicja 1. Powiemy, że podzbiór $I \subset \mathbb{R}$ jest *przedziałem domkniętym*, jeżeli jest on jednej z postaci:

* $I = [a, b]$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (np. $[1, 2]$);
* $I = [a, \infty)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ (np. $[1, \infty)$);
* $I = (-\infty, a]$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ (np. $(-\infty, 2]$);
* $I = \mathbb{R}$.

Definicja 2. Niech I będzie przedziałem domkniętym i $f : I \to I$. Powiemy, że f jest odwzorowaniem *zwężającym*, jeżeli istnieje $\alpha < 1$ taka, że dla dowolnych $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

Powiemy, że f jest odwzorowaniem *słabo zwężającym*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in I$ takich, że $x \neq y$, zachodzi

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Powiemy, że f jest odwzorowaniem *nieoddalającym*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Uwaga 3. Każde odwzorowanie zwężające jest słabo zwężające, a każde odwzorowanie słabo zwężające jest nieoddalające.

Przykład 4.
Funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x$ dla $x \in [0, \infty)$ jest odwzorowaniem zwężającym. Istotnie:
- dla dowolnego $x \in [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2}x \in [0, \infty)$, zatem $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$;
- dla dowolnych $x, y \in [0, \infty)$,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2} |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y| .$$

Przykład 5. Funkcja g dana wzorem $g(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem nieoddalającym ale nie jest odwzorowaniem słabo zwężającym. Istotnie, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|g(x) - g(y)| = |x - y| \leq |x - y|.$$

Przypuśćmy, że g jest odwzorowaniem słabo zwężającym. Wówczas dla różnych $x, y \in \mathbb{R}$ dostajemy sprzeczność:

$$|x - y| = |g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

Przykład 6. Funkcja $h(x) = x + 1$ dla $x \in [0, 1]$ nie jest odwzorowaniem nieoddalającym, ponieważ $h(1) = 2 \notin [0, 1]$. Zatem nieprawda, że $h : [0, 1] \to [0, 1]$.

Twierdzenie 7. *Niech I będzie przedziałem domkniętym, $f : I \to \mathbb{R}$ oraz niech $\alpha < \infty$. Załóżmy, że f jest różniczkowalna na I (na krańcach I rozważamy pochodne jednostronne). Następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla dowolnego $x \in I$, moduł pochodnej $|f'(x)| \leq \alpha$;*

(ii) *dla dowolnych $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$.*

Uwaga 8. Poniżej zakładamy, że f, g są zdefiniowane na pewnym przedziale domkniętym I oraz $a \in \mathbb{R}$.

1. Pochodne podstawowych funkcji:
   - jeżeli $f(x) = x$, to $f'(x) = 1$;
   - jeżeli $f(x) = 1$, to $f'(x) = 0$;
   - jeżeli $n \geq 2$ i $f(x) = x^n$, to $f'(x) = nx^{n-1}$;
   - jeżeli $f(x) = \sin x$, to $f'(x) = \cos x$;
   - jeżeli $f(x) = \cos x$, to $f'(x) = -\sin x$;
   - jeżeli $f(x) = e^x$, to $f'(x) = e^x$.
2. Podstawowe własności pochodnych:
   - $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (np. $(x + x^2)' = (x)' + (x^2)' = 1 + 2x^1 = 1 + 2x$);
   - $(af)'(x) = af'(x)$ (np. $(3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$).

Przykład 9. Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \frac{1}{15}x^3$ dla $x \in [0, 2]$. Łatwo widać, że dla $x \in [0, 2]$, $f(x) \in [0, 2]$, czyli $f : [0, 2] \to [0, 2]$. Jednocześnie dla dowolnego $x \in [0, 2]$, $|f'(x)| = |\frac{3}{15}x^2| \leq \frac{12}{15}$. Wobec Twierdzenia 7, f jest odwzorowaniem zwężającym.

Definicja 10. Niech I będzie przedziałem domkniętym i $f : I \to I$. Powiemy, że $x_* \in I$ jest *punktem stałym* f, jeżeli $f(x_*) = x_*$.

Twierdzenie 11. *(Zasada Banacha) Jeżeli I jest przedziałem domkniętym i $f : I \to I$ jest odwzorowaniem zwężającym, to f posiada dokładnie jeden punkt stały.*

Zadania do wykonania (3p + 4p + (2p + 3p) + 3p):

(I) Rozważmy funkcje f, g, h, p zdefiniowane następująco:
$f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$;
$g(x) = x^2$ dla $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$;
$h(x) = x^2 + 5$ dla $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;
$p(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$.
Dla każdej z tych funkcji oceń, czy jest ona odwzorowaniem zwężającym oraz czy jest ona odwzorowaniem nieoddalającym. W każdym przypadku odpowiedź uzasadnij.

(II) Wykonaj **jedno** z poniższych zadań:
(a) Podaj przykład odwzorowania słabo zwężającego które nie jest zwężające. (2p)
(b) Podaj przykład odwzorowania słabo zwężającego bez punktu stałego, które nie jest zwężające. (4p)

(III) (a) Niech f będzie odwzorowaniem słabo zwężającym. Udowodnij, że f posiada co najwyżej jeden punkt stały.
(b) Niech f będzie odwzorowaniem nieoddalającym. Udowodnij, że f posiada co najwyżej jeden punkt stały lub posiada nieskończenie wiele punktów stałych.

(IV) Korzystając z Zasady Banacha wykaż, że równanie
$$2x + \cos x = 2$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze $\mathbb{R}$.

ZADANIE 7 (11 pkt.).
Dla dowolnych dwu liczb naturalnych $a, b \in \mathbb{N}$ można zdefiniować ich *największy wspólny dzielnik* jako największą liczbę naturalną, która dzieli a oraz b. Zwyczajowo największy wspólny dzielnik liczb a, b oznaczamy (a, b). Dodatkowo, jeśli $(a, b) = 1$ to liczby a, b nazywamy *względnie pierwszymi.*

PRZYKŁAD 1. Niech $a = 12$, $b = 32$ wówczas $(a, b) = 4$.

Poniższy algorytm, zwany *Algorytmem Euklidesa* pozwala w łatwy sposób znaleźć największy wspólny dzielnik dwu liczb.

ALGORYTM 2. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Oczywiście, jeśli $a = b$, to $(a, b) = a$. Możemy więc założyć, że $a \neq b$ i przyjąć, dla ustalenia uwagi, że $b < a$.

Krok 1. Dzielimy liczbę a przez b uzyskując resztę $a_1 \in \{0, 1, ..., b-1\}$.
Krok 2. Dzielimy liczbę liczbę b przez a_1 uzyskując resztę $a_2 \in \{0, 1, ..., a_1 - 1\}$.
Krok 3. Dzielimy liczbę a_1 przez a_2 uzyskując resztę $a_3 \in \{0, 1, ..., a_2 - 1\}$.
...
Algorytm kończy się w kroku $n \in \mathbb{N}$, w którym $a_n = 0$. Wówczas $(a, b) = a_{n-1}$.

PRZYKŁAD 3. Niech $a = 929$ oraz $b = 277$. Mamy:
Krok 1. $929 = 3 \cdot 277 + 98$
Krok 2. $277 = 2 \cdot 98 + 81$
Krok 3. $98 = 1 \cdot 81 + 17$
Krok 4. $81 = 4 \cdot 17 + 13$
Krok 5. $17 = 1 \cdot 13 + 4$
Krok 6. $13 = 3 \cdot 4 + 1$
Krok 7. $4 = 4 \cdot 1 + 0$.
Ostatnią niezerową resztą jest $a_6 = 1$ zatem $(929, 277) = 1$.

TWIERDZENIE 4. *Niech $a, b \in \mathbb{N}$ oraz oznaczmy $D = (a, b)$. Wówczas istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $D = xa + yb$.*

Przedstawienie największego wspólnego dzielnika w postaci kombinacji liniowej o współczynnikach całkowitych można łatwo znaleźć "odwracając" algorytm Euklidesa w następujący sposób (odnosząc się do powyższego przykładu):

PRZYKŁAD 5.
$1 \overset{\text{Krok 6.}}{=} 13 - 3 \cdot 4 \overset{\text{Krok 5.}}{=} 13 - 3 \cdot (17 - 1 \cdot 13) = (-3) \cdot 17 + 4 \cdot 13 \overset{\text{Krok 4.}}{=} (-3) \cdot 17 + 4 \cdot (81 - 4 \cdot 17) = 4 \cdot 81 - 19 \cdot 17 \overset{\text{Krok 3.}}{=} 4 \cdot 81 - 19 \cdot (98 - 1 \cdot 81) = (-19) \cdot 98 + 23 \cdot 81 \overset{\text{Krok 2.}}{=} (-19) \cdot 98 + 23 \cdot (277 - 2 \cdot 98) = 23 \cdot 277 - 65 \cdot 98 \overset{\text{Krok 1.}}{=} 23 \cdot 277 - 65 \cdot (929 - 3 \cdot 277) = (-65) \cdot 929 + 218 \cdot 277.$
Ostatecznie $(929, 277) = 1 = (-65) \cdot 929 + 218 \cdot 277$.

Definicja 6. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$, rozważmy zbiór $\phi(n) = \{k \in \{1, ..., n\} \colon (k, n) = 1\}$. W zbiorze $\phi(n)$ można określić działanie dwuargumentowe

$$\cdot_n \colon \phi(n) \times \phi(n) \to \phi(n)$$

następująco: $a \cdot_n b$ to reszta z dzielenia $a \cdot b$ przez n, dla $a, b \in \phi(n)$ (reszta z dzielenia $a \cdot b$ przez n, to jedyna liczba $r \in \{0, ..., n-1\}$ taka, że liczba $a \cdot b - r$ jest podzielna przez n).

Twierdzenie 7. *Działanie $\cdot_n$ w zbiorze $\phi(n)$ ma następujące własności:*

(i) dla każdego $a \in \phi(n)$ mamy $1 \cdot_n a = a$;
(ii) dla wszystkich $a, b \in \phi(n)$ mamy $a \cdot_n b = b \cdot_n a$;
(iii) dla wszystkich $a, b, c \in \phi(n)$ mamy $(a \cdot_n b) \cdot_n c = a \cdot_n (b \cdot_n c)$;
(iv) dla każdego $a \in \phi(n)$ istnieje dokładnie jedno $a^{-1} \in \phi(n)$ takie, że $a \cdot_n a^{-1} = 1$.

Przykład 8. Rozważmy zbiór $\phi(929)$. W poprzednich przykładach pokazaliśmy, że $(929, 277) = 1$ zatem $277 \in \phi(929)$. Dodatkowo, skoro $1 = (-65) \cdot 929 + 218 \cdot 277$, to $218 \cdot_{929} 277 = 1$. Stąd $277^{-1} = 218$.

Zadania do wykonania (2p + 3p + 2p + 2p + 2p):

(I) Wykorzystując Algorytm Euklidesa wyznacz $(282, 78)$.
(II) Wykorzystując Twierdzenie 4 wykaż, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{N}$ istnieją $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $xa + yb = (a, b)$ (tj., że można oczekiwać, aby w kombinacji liniowej generującej największy wspólny dzielnik z Twierdzenia 4 KONKRETNY współczynnik był dodatni).
(III) Znajdź $(121)^{-1}$ w zbiorze $\phi(416)$.
(IV) Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in \phi(n)$ mamy $(a^{-1})^{-1} = a$.
(V) Rozwiąż w $\phi(37)$ równanie zmiennej $x \in \phi(37)$ postaci:

$$8 \cdot_{37} x^{-1} = 16,$$

tj. znajdź wszystkie $x \in \phi(37)$ spełniające to równanie.