X Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 22 lutego 2018 r.

W zadaniach przyjmujemy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

1. Prawdą jest, że:

   [ ] $\log_{10} \operatorname{tg} 1^\circ + \log_{10} \operatorname{tg} 2^\circ + ... + \log_{10} \operatorname{tg} 89^\circ = \log_{10} \frac{\pi}{2}$;
   [ ] $\log_{10} \operatorname{tg} 2^\circ + \log_{10} \operatorname{tg} 4^\circ + ... + \log_{10} \operatorname{tg} 86^\circ + \log_{10} \operatorname{tg} 88^\circ = \log_{10} \frac{\pi}{4}$;
   [ ] Ciąg $\log_{10} \operatorname{tg} 1^\circ, \log_{10} \operatorname{tg} 2^\circ, ..., \log_{10} \operatorname{tg} 44^\circ, \log_{10} \operatorname{tg} 45^\circ, -\log_{10} \operatorname{tg} 44^\circ, ..., -\log_{10} \operatorname{tg} 2^\circ, -\log_{10} \operatorname{tg} 1^\circ$ jest rosnący.

2. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $D = \{d_1, d_2, ..., d_p\}$ będzie zbiorem wszystkich dzielników liczby n.

   [ ] Jeżeli suma elementów zbioru D jest dwukrotnie większa od n, to suma odwrotności tych dzielników wynosi 2.
   [ ] $D \subset E$, gdzie $E = \{\frac{n}{d_i} : i = 1, ..., p\}$.
   [ ] Zbiór $E \setminus D$ zawiera co najmniej jedną liczbę pierwszą.

3. Niech $p \in \mathbb{N}$. Rozważmy sumę p kolejnych liczb naturalnych. Jeżeli suma ta jest parzystą liczbą podzielną przez p, zaś najmniejszy z jej składników jest liczbą parzystą, to:

   [ ] p jest liczbą nieparzystą;
   [ ] na podstawie podanych informacji nie można nic powiedzieć o parzystości p;
   [ ] liczba $p + 2$ jest podzielna przez 4.

4. Dysponujemy 4 urnami ponumerowanymi liczbami od 1 do 4. Każda z nich zawiera 3 kule. Liczba kul białych w urnie o numerze i jest równa $i - 1$ dla $i = 1, \dots, 4$. Losujemy urnę, a następnie losujemy z niej jedną kulę.

   [ ] Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest większe niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.
   [ ] Jeśli wiadomo, że wylosowano urnę numer 2 to prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest mniejsze niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.
   [ ] Jeśli wiadomo, że wylosowano kulę białą to prawdopodobieństwo, że losowano z urny nr 2 wynosi $\frac{1}{4}$.

5. Dane są dwie ściśle rosnące funkcje f i g określone na zbiorze liczb rzeczywistych. Dodatkowo zakładamy, że funkcja g jest różna od zera w każdym punkcie swojej dziedziny. Wówczas:

   [ ] iloczyn funkcji f i g jest funkcją ściśle rosnącą;
   [ ] iloraz $\frac{f}{g}$ jest funkcją monotoniczną;
   [ ] iloraz $\frac{f}{g}$ może być funkcją rosnącą.

6. Liczba zer na końcu liczby 104! wynosi:

   [ ] 20;
   [ ] 22;
   [ ] 24.

7. Wiadomo, że funkcja f jest różniczkowalna i okresowa o okresie równym T. Wówczas pochodna funkcji f:

   [ ] jest funkcją okresową o okresie równym T;
   [ ] jest funkcją okresową, ale jej okres może być różny od T;
   [ ] nie musi być funkcją okresową.

8. Dana jest funkcja f opisana wzorem $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ ||x+3| - 4| & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$. Równanie $f(x) = 1$ ma

[ ] dokładnie dwa rozwiązania i są nimi 2 oraz 5;
[ ] dokładnie jedno rozwiązanie i nim to 2;
[ ] co najmniej cztery rozwiązania.

9. Wiadomo, że γ jest kątem ostrym, oraz $\sin\gamma\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Wartość $\sin^4\gamma + \cos^4\gamma$ wynosi:

[ ] $\frac{1}{4}$;
[ ] $\frac{1}{2}$;
[ ] $\frac{3}{4}$.

10. Czy prawdziwe są poniższe równości?

[ ] $\sqrt{2} = \cfrac{\frac{\pi}{2}}{1+\cfrac{\frac{\pi^2}{16}}{(6-\frac{\pi^2}{16})+\cfrac{\frac{3\pi^2}{8}}{(20-\frac{\pi^2}{16})+\cfrac{\frac{5\pi^2}{4}}{(32-\frac{\pi^2}{16})+\dots}}}}$;

[ ] $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}}}}$;

[ ] $\sqrt{2} = \frac{99}{70} + \frac{1}{-6930-4900\sqrt{2}}$.

11. Zdefiniujmy działanie $\circ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jako $x \circ y := xy + x + y$. Wówczas:

[ ] równanie $x \circ x = -1$ ma jedno rozwiązanie;
[ ] dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje taki $y \in \mathbb{R}$, że $x \circ y = 0$;
[ ] dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje taki $y \in \mathbb{R}$, że $x \circ y = x$;
[ ] równanie $x \circ y = x + y$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze $\mathbb{R}^2$.

12. Wiadomo, że $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{n} x^n$. Prawdziwe są następujące tożsamości:

[ ] $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
[ ] $\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i} > 0$;
[ ] $\sum_{\{i:2|i\}} \binom{n}{i} = 2^{n-1}$;
[ ] $\sum_{\{i:4|i\}} \binom{n}{i} = 2^{n-2}$.

13. Sekretarka wkłada losowo sześć listów do sześciu prawidłowo zaadresowanych kopert. Prawdopodobieństwo, że dokładnie pięć z nich znajdzie się we właściwej kopercie wynosi:

[ ] $\binom{6}{5} - \binom{6}{1}$;
[ ] $\frac{5!}{6!}$;
[ ] $\frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n^2+5n-3}{n^3-6n^2-8n+1}}$;
[ ] $\left(e^{\ln(1-\cos^2(\frac{\pi}{2}))} + 0,(9)\right) \mod 2$.

14. Niech $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}}}$. Wówczas:

[ ] x jest liczbą całkowitą;
[ ] x jest liczbą wymierną;
[ ] x jest liczbą pierwszą;
[ ] x jest liczbą niewymierną.

15. Niech n będzie liczbą parzystą dodatnią. Wówczas liczba $3^n + 63$ jest:

[ ] podzielna przez 2;
[ ] podzielna przez 3;
[ ] podzielna przez 72;
[ ] liczbą pierwszą.

16. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $\frac{n+1}{n-1} \in \mathbb{N}$. Wówczas na pewno:

[ ] $\frac{6}{n} \in \mathbb{N}$;
[ ] $\frac{3}{n+2} \in \mathbb{N}$;
[ ] $\frac{1}{n+1} \in \mathbb{N}$;
[ ] $\frac{n}{n+3} \in \mathbb{N}$.

17. Nierówność $4x^2 + y^2 - 8x + 6y + 13 \leq 0$ przedstawia na płaszczyźnie:

[ ] koło;
[ ] okrąg:
[ ] punkt;
[ ] zbiór pusty.

18. W rozwinięciu wyrażenia $(x + 2y)^6$ współczynnik przy xy^5 wynosi:

[ ] 192;
[ ] 48;
[ ] 28;
[ ] 16.

19. Ile co najmniej okrągłych serwetek o średnicy 10 cm trzeba ułożyć na obrusie, aby zakryć plamę mającą kształt trójkąta równobocznego o boku długości 10 cm?

[ ] 1;
[ ] 2;
[ ] 3;
[ ] 4.

20. Na ile trójkątów równobocznych można podzielić trójkąt równoboczny?

[ ] 7;
[ ] 9;
[ ] 6;
[ ] 2.

21. Ile jest dwucyfrowych liczb naturalnych 12-krotnie większych od swojej cyfry dziesiątek?

[ ] 4;
[ ] 5;
[ ] 8;
[ ] 0.

22. Liczba $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ jest równa liczbie minut w miesiącu:

[ ] czerwcu;
[ ] lutym (w roku przestępnym);
[ ] lutym (w roku nieprzestępnym);
[ ] wrześniu.

23. Ile wynosi pierwiastek kwadratowy z liczby 425104 ?

[ ] 642;
[ ] 650;
[ ] 652;
[ ] 654.

24. Kwadrat pewnej liczby naturalnej jest trzykrotnie mniejszy od jej sześcianu. Suma cyfr tej liczby wynosi:

[ ] 3;
[ ] 5;
[ ] 6;
[ ] 8.

25. Prosta o równaniu $4x + 50y - 200 = 0$ tworzy wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt. Jeśli prosta o równaniu $y = \frac{2x}{\sqrt{k+10-20}}$ dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach, to k może wynosić:

[ ] $\frac{25\cdot\sqrt{625}}{629}$.
[ ] $\frac{14\cdot\sqrt{625}}{629}$.
[ ] 2015.
[ ] 2018.

26. W poniższych punktach, zbiory $[a, b]$ oraz (a, b) oznaczają, odpowiednio, przedział domknięty i przedział otwarty o końcach a, b.

[ ] $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$;
[ ] $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$;
[ ] $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = [-1, 1]$;
[ ] $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [-1, 1)$.

27. Z pełnej talii kart (52 karty) losujemy 5 kart (bez zwrotu).

[ ] "trójkę" (tzn. zbiór kart, w którym dokładnie trzy karty są takiej samej wysokości a dwie pozostałe nie są takiej samej wysokości) możemy uzyskać na $13 \cdot 3!$ sposobów;
[ ] "fulla" (tzn. zbiór kart, w którym dokładnie trzy karty są takiej samej wysokości oraz pozostałe dwie są tej samej wysokości, lecz innej niż te trzy) możemy otrzymać na $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ sposobów;
[ ] zbiór kart, w którym każda karta jest innej wysokości możemy otrzymać na $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ sposobów;
[ ] "pokera" (tzn. zbiór kart, w którym karty są jednego koloru i mają kolejnych 5 wysokości) możemy otrzymać na 36 sposobów.

28. Równanie $3 \cdot (x + 2)^{\frac{1}{2}} = x^3 + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ ma:

[ ] 0 rozwiązań;
[ ] 1 rozwiązanie;
[ ] 2 rozwiązania;
[ ] 3 rozwiązania.

29. Liczba m jest najmniejszą dodatnią liczbą rzeczywistą, dla której równanie $\frac{|3\cdot|x+2|-6|}{|x+2|+1} = m$ ma dokładnie 2 rozwiązania. Wówczas m wynosi:

[ ] $\frac{1}{2}$;
[ ] 2;
[ ] 3;
[ ] 4.

30. Równanie $\frac{(\sin 4\alpha+\cos^3\alpha)\cos 6\alpha}{\sin 4\alpha+\sin^4\alpha} = \alpha^{\sin 4\alpha}$ ma w przedziale $[0, 2\pi]$:

[ ] dokładnie jedno rozwiązanie niewymierne;
[ ] mniej niż trzy rozwiązania wymierne;
[ ] więcej niż trzy i mniej niż pięć rozwiązań;
[ ] więcej niż pięć rozwiązań, w tym nie mniej niż cztery niewymierne.

X Wojewódzki Konkurs Matematyczny "‘W świecie Matematyki"’
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 22 lutego 2018 r.

KARTA ODPOWIEDZI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30