Czwarty Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy
15 lutego 2012 r.

Maksymalna do zdobycia ilość punktów: 80

1. Prawdziwa jest nierówność
[ ] $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789} > 123456789^{\log_7(\log_7 123456789)}$
[ ] $\log_4 7^{\log_3 5} > \log_3 5^{\log_4 7}$
[ ] $2^{\log_3 7} > 7^{\log_3 2}$
2. Parabola $y = x^2$ ma jeden punkt wspólny z okręgiem o środku w punkcie $(0, a)$ i promieniu $a > 0$
[ ] tylko dla $a = \frac{1}{2}$
[ ] dla nieskończenie wielu wartości a
[ ] dla dokładnie dwóch różnych wartości a
3. Zbiór rozwiązań nierówności $|x + 3| + |x - 4| \geq |2x + 5|$
[ ] zawiera się w zbiorze rozwiązań nierówności $|x - 3| + |x - 4| \geq |2x - 5|$
[ ] zawiera zbiór $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{N}}\ x = -y\}$
[ ] jest rozłączny ze zbiorem rozwiązań nierówności $2^{\log_5 x} < 4^{\log_5 x}$
4. Na płaszczyźnie zaznaczono trzy niewspółliniowe punkty A, B, C. Wówczas
[ ] istnieje punkt płaszczyzny D taki, że figura $f = \{A, B, C, D\}$ ma oś symetrii
[ ] punkty A, B, C wyznaczają jednoznacznie pewien okrąg
[ ] suma odległości od punktu A do B i od punktu A do C jest większa od odległości między dwoma najbardziej odległymi punktami
5. Istnieje kąt α taki, że
[ ] $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ oraz $tg\alpha = \frac{3}{4}$
[ ] $\sin\alpha = -\frac{1}{9}$ oraz $ctg\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
[ ] $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $tg\alpha = -\frac{4}{5}$
6. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem arytmetycznym, zaś S_n będzie sumą n początkowych wyrazów ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wówczas
[ ] ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący
[ ] ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ może być ciągiem geometrycznym
[ ] ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem arytmetycznym
7. Zbiorem rozwiązań nierówności $3 \cdot 5^{x+1} - 7 \cdot 10^{x-1} \leq 2 \cdot 20^x$ jest
[ ] pewien przedział
[ ] zbiór pusty
[ ] zbiór zawierający wszystkie liczby całkowite dodatnie
8. Prawdziwe jest zdanie
[ ] suma odległości dowolnego punktu wewnętrznego trójkąta od wierzchołków jest większa od połowy obwodu
[ ] pole trójkąta prostokątnego o obwodzie $2p$ jest niewiększe od $\frac{p^2}{\pi}$
[ ] ze środkowych dowolnego trójkąta jako odcinków można zbudować trójkąt

9. Woda pompowana jest do zbiornika o objętości 3000 litrów z trzech kranów: A, B i C. Wiadomo, że wypełnienie zbiornika wodą przy wykorzystaniu samego kranu A zajęłoby 20 godzin więcej czasu niż przy wykorzystaniu samego kranu B, ale także zajęłoby sześć razy więcej czasu niż przy wykorzystaniu samego kranu C. Gdyby woda była pompowana ze wszystkich trzech kranów, to przez godzinę wypełniłaby ona $\frac{1}{3}$ objętości zbiornika. Wynika stąd, że jeżeli zbiornik napełniany jest tylko przy użyciu jednego kranu, to może on zostać całkowicie wypełniony wodą w

[ ] dokładnie 5 godzin

[ ] dokładnie 7 godzin

[ ] dokładnie 9 godzin

10. Funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^6$

[ ] jest wielomianem stopnia trzeciego

[ ] jest rosnąca

[ ] ma dwa różne miejsca zerowe

11. Prawdziwe jest zdanie

[ ] $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \exists_{z \in \mathbb{R}}\ xy + yz + 1 = 0$

[ ] $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \exists_{z \in \mathbb{R}}\ xy + yz + 1 \neq 0$

[ ] $\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \forall_{z \in \mathbb{R}}\ xy + yz + 1 = 0$

[ ] $\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \forall_{z \in \mathbb{R}}\ xy + yz + 1 \neq 0$

12. Dla dowolnych liczb rzeczywistych spełniających warunek $x^2 + y^2 \leq 1$ prawdziwa jest nierówność

[ ] $x + y \leq 1$

[ ] $|x| + |y| \leq 1$

[ ] $x^4 + y^4 \leq 1$

[ ] $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1$

13. Jeżeli średnia arytmetyczna sześciu dodatnich różnych od siebie liczb naturalnych jest równa 5, to

[ ] wśród liczb tych znajduje się przynajmniej jedna liczba parzysta

[ ] wśród liczb tych znajduje się przynajmniej jedna liczba nieparzysta

[ ] wśród liczb tych znajduje się liczba 5

[ ] iloczyn najmniejszej liczby z największą jest mniejszy od 20

14. Spośród podanych wielomianów, podzielny przez $x^3 + 1$ jest

[ ] $x^9 + 1$

[ ] $x^{18} - 1$

[ ] $x^{12} + 1$

[ ] $x^{15} - 1$

15. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów pewnego ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wówczas

[ ] ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony

[ ] jeżeli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest arytmetyczny oraz $\frac{S_m}{S_n} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$, to $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$

[ ] jeżeli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest geometryczny, to istnieje $q \in \mathbb{R}$ takie, że $\frac{S_m}{S_n} = q^{m-n}$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$

[ ] jeżeli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich, to ciąg $\frac{S_n}{a_n}$ jest zbieżny do pewnej liczby skończonej

16. Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka jest połową koła o promieniu r. Wówczas

[ ] kąt nachylenia tworzącej stożka do podstawy ma miarę $\frac{\pi}{4}$

[ ] objętość stożka wynosi $\frac{\pi r^3}{12}$

[ ] pole powierzchni całkowitej stożka wynosi πr^2

[ ] objętość stożka jest równa jednej trzeciej objętości kuli o promieniu równym promieniowi podstawy stożka

17. Jeżeli liczba naturalna trzycyfrowa ma co najmniej dziesięć różnych dzielników, to liczba ta

[ ] jest podzielna przez 16

[ ] jest większa od 500

[ ] może być podzielna przez 10

[ ] ma sumę cyfr mniejszą od 20

18. Zbiór rozwiązań nierówności $x \cdot 3^{x-1} > 1$

[ ] jest zbiorem wypukłym

[ ] jest równy zbiorowi rozwiązań nierówności $x^2 \cdot 4^{x-1} > 1$

[ ] zawiera zbiór $\{x > 0 : \sin x = 1\}$

[ ] ma punkty wspólne ze zbiorem rozwiązań nierówności $\left\{x \in \mathbb{R} : x^4 + x^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$

19. Wiadomo, że dla pewenej liczby α wyrażenie $\sin\alpha - \cos\alpha$ jest wymierne, różne od 0, 1 i -1. Wówczas wymierne jest wyrażenie

[ ] $\sin 4\alpha$

[ ] $\cos 4\alpha$

[ ] $tg 4\alpha$

[ ] $ctg 4\alpha$

20. Zdarzenia A i B są niezależne. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe $\frac{2}{3}$, a prawdopodobieństwo jednoczesnego zajścia zdarzeń A i B jest równe q. Niech $F(q)$ bedzie prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia B. Wtedy

[ ] $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$

[ ] $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$

[ ] $F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}$

[ ] $F\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$

21. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano kwadrat. Wówczas

[ ] jeżeli a jest liczbą wymierną, to pole kwadratu jest też liczbą wymierną

[ ] obdwód kwadratu wynosi $\left(8\sqrt{3} - 12\right) a$

[ ] pole kwadratu jest większe od pola powierzchni koła wpisanego w dany trójkąt

[ ] punktu przecięcia się przekątnych w kwadracie jest punktem przeciącia się wysokości w trójkącie

22. Przez punkt o współrzędnych $(-3, -5)$ poprowadzono prostą, która wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu równym 1. Wówczas

[ ] współczynnik kierunkowy tej prostej jest ujemny

[ ] istnieje nieskończenie wiele prostych spełniających warunki zadania

[ ] prosta ta przecina oś OX w pewnym punkcie $x_0 > x$

[ ] odległość tej prostej od punktu $(0,0)$ jest równa 1

23. Niech $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log_x y < \log_y x\right\}$. Wówczas

[ ] A jest zbiorem wypukłym

[ ] A jest zbiorem nieograniczonym

[ ] $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^x < x^y\}$

[ ] $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log_x \left(\log_y x\right) > 0\right\} \subset A$

24. Jeżeli n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, to

[ ] dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k liczba $n^k - n$ jest podzielna przez k

[ ] liczba $\frac{n^6+4n^5-29n^4-156n^3-180n^2}{n^2+5n+6}$ jest całkowita

[ ] liczba $2n\,(2n+2)\,(2n+4)$ jest podzielna przez 48

[ ] $n^x + n^{-x} \geq 2$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x

25. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o miarach $20°$ i $40°$. Wówczas jeden z kątów tego czworokąta ma miarę

[ ] $30°$

[ ] $45°$

[ ] $60°$

[ ] $90°$

26. Pewna firma produkuje kafelki w dwóch gatunkach: lepszym i gorszym. Produkcja metra kwadratowego gorszych kafelków kosztuje firmę 20 złotych, zaś lepszych kafelków - 25 złotych. Zysk firmy ze sprzedaży metra kwadratowego kafelków wynosi 5 złotych dla gorszych kafelków i 8 złotych dla lepszych kafelków. Firma podpisała kontrakt na sprzedaż 450 metrów kwadratowych kafelków, obojętnie którego gatunku. Firma na produkcję tych kafelków może przeznaczyć kwotę 10000 złotych. Wówczas maksymalny zysk jaki firma może uzyskać ze sprzedaży kafelków wynosi

[ ] 2000 złotych

[ ] 2300 złotych

[ ] 2550 złotych

[ ] 2850 złotych

27. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{9 - 4\sin^2 2x - 8\cos^2 x} - 3$. Wtedy

[ ] funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych

[ ] naturalną dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych

[ ] zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[-3, 0]$

[ ] największa wartość tej funkcji osiągana jest dla $x = \frac{\pi}{3}$

28. Ze zbioru $A = \{0, 1, 2, ..., 2012\}$ losujemy ze zwracaniem dwie liczby. Wówczas

[ ] prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest większa od 2012 wynosi $\frac{1007}{2013}$

[ ] prawdopodobieństwo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej wynosi $\frac{1007}{2013}$

[ ] prawdopodobieństwo, że iloczyn tych liczb jest podzielny przez 3 wynosi $\frac{1007}{2013}$

[ ] prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb jest parzysta wynosi $\frac{1007}{2013}$

29. W dwudziestościanie foremnym odcięto płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi każdy z narożników. Otrzymana bryła

[ ] jest wielościanem foremnym

[ ] ma 48 ścian

[ ] ma 60 wierzchołków

[ ] ma 60 krawędzi

30. Niech a_n oznacza ilość dzielników liczby całkowitej dodatniej n. Wówczas

[ ] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym

[ ] $a_n = n$ tylko dla dwóch wartości n

[ ] $a_{6n} \geq a_{4n}$ dla dowolnego n

[ ] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem rozbieżnym do $+\infty$