VII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 16 lutego 2015 r.

1. Pole figury ograniczonej przez oś OX oraz wykres funkcji $f(x) = 1 - x^2$ jest

   [ ] większe niż $\frac{3}{4}$;
   [ ] większe niż 1;
   [ ] większe niż $\frac{4}{3}$.

2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Rozważmy trójkąt o bokach długości n, $n+1$, $n+2$. Trójkąt ten może być

   [ ] rozwartokątny;
   [ ] prostokątny;
   [ ] ostrokątny.

3. Dany jest czworokąt $ABCD$. Na tym czworokącie na pewno da się opisać okrąg, jeżeli

   [ ] $|\angle ADB| = |\angle ACB|$;
   [ ] $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| \cdot |BC| \cdot |AD|$;
   [ ] $|\angle ABC| + |\angle BCD| = |\angle BAD| + |\angle ADC| = 180°$.

4. Rozważmy trójkąt prostokątny, którego długości boków można ustawić w rosnący ciąg arytmetyczny o różnicy r. Wówczas

   [ ] jeżeli jedna przyprostokątna tego trójkąta ma długość 12, to średnica opisanego na nim okręgu ma długość 15;
   [ ] jeżeli obwód tego trójkąta wynosi 36, to średnica opisanego na nim okręgu ma długość 15;
   [ ] długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa różnicy r.

5. Wielomian $W(x) = \left(8x^3 - 8x - 1\right)^{2015}$, po dokonaniu potęgowania i redukcji wyrazów podobnych zapisano w postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Wówczas

   [ ] $\sum_{k=1}^{n} a_n = 0$;
   [ ] $\sum_{k=1}^{n} a_n = -1$;
   [ ] $\sum_{k=1}^{n} a_n = -2$.

6. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. Wówczas liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez

   [ ] 10;
   [ ] 15;
   [ ] 30.

7. Dwie osoby rzucają symetrycznymi, sześciennymi kostkami. Na kostce gracza (1) znajdują się liczby $2, 2, 3, 3, 6, 6$, a na kostce gracza (2) liczby $1, 3, 4, 4, 4, 6$. Grę wygrywa ten, który wyrzuci większą liczbę. Wówczas

   [ ] większą szansę na wygraną ma gracz (1);
   [ ] większą szansę na wygraną ma gracz (2);
   [ ] obaj gracze mają równe szanse na wygraną.

8. Załóżmy, że $a > 0$ oraz $b > 0$. Wówczas spełnione są nierówności:

[ ] $4a^3 - b^3 \geq 3ab^2$;
[ ] $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2}{8a}$;
[ ] $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

9. Wiedząc, że $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, ile wynosi $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{3n}\right)^n$

[ ] e^5;
[ ] $e^{\frac{3}{5}}$;
[ ] $e^{\frac{5}{3}}$.

10. Niech $A_n = (a_n, b_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n < b_n$. Iloczyn $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ może być

[ ] przedziałem otwartym;
[ ] przedziałem domkniętym;
[ ] niepusty, jeśli $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

11. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą oraz $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją malejącą. Wtedy

[ ] $k \cdot f$, gdzie $k \neq 0$, jest funkcją rosnącą;
[ ] $f \cdot g$ może być funkcją stałą;
[ ] $f \cdot g$ może być funkcją rosnącą;
[ ] $f \cdot g$ może być funkcją malejącą;

12. Rozważmy czworokąt wypukły, którego przekątne są jego osiami symetrii. Czworokąt ten na pewno jest

[ ] kwadratem;
[ ] rombem;
[ ] równoległobokiem;
[ ] trapezem;

13. Losujemy punkt ze zbioru $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$.

[ ] Prawdopodobieństwo tego, że wylosowany punkt leży powyżej wykresu funkcji $f(x) = -|x|$ wynosi $\frac{1}{4}$;
[ ] Prawdopodobieństwo tego, że wylosowany punkt należy do koła o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ wynosi $\frac{\pi}{4}$;
[ ] Prawdopodobieństwo tego, że wylosowany punkt ma współrzędne różnych znaków wynosi $\frac{1}{2}$;
[ ] Prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna współrzędna wylosowanego punktu jest równa 0 wynosi 0.

14. Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ jest równa

[ ] 1;
[ ] 2;
[ ] $\frac{4}{3}$;
[ ] $\frac{1}{3}$;

15. Funkcję $f : X \to Y$, gdzie X i Y są dowolnymi niepustymi zbiorami nazywamy suriekcją ("na"), gdy $\forall_{y \in Y} \; \exists_{x \in X} \quad f(x) = y$. Która z podanych funkcji jest suriekcją?

[ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
[ ] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$;
[ ] $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;
[ ] $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$;

16. W pewnej grupie liczącej 150 osób 45 regularnie pływa, 40 jeździ na rowerze, a 50 biega. Poza tym 32 osoby biegają, ale nie jeżdżą na rowerze, 27 osób biega i pływa oraz 10 osób uprawia wszystkie trzy dyscypliny. Ile osób biega, ale nie pływa i nie jeździ na rowerze?

[ ] 5;
[ ] 15;
[ ] 13;
[ ] 10.

17. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą bijekcjami (funkcjami różnowartościowymi i "na"). Wówczas

[ ] $f + g$ jest funkcją zerową lub bijekcją;
[ ] $af + bg$ jest funkcją zerową lub bijekcją, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$;
[ ] Istnieją $c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $cf + dg$ jest bijekcją;
[ ] Istnieją $c, d \in \mathbb{R}$ takie, że $cf + dg$ nie jest bijekcją.

18. Które z poniższych zdań jest tautologią

[ ] $(p \implies q) \implies ((p \wedge r) \implies q)$;
[ ] $(p \implies q) \implies ((p \vee r) \implies q)$;
[ ] $((p \implies q) \wedge (p \implies r)) \implies (p \implies (q \wedge r))$;
[ ] $((p \implies p) \implies p)... \implies p$ dla parzystej liczby implikacji.

19. Iloczyn dwóch liczb naturalnych wynosi $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$. Suma tych liczb może być

[ ] podzielna przez 5;
[ ] podzielna przez 6;
[ ] podzielna przez 49;
[ ] liczbą parzystą.

20. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $A \subseteq \mathbb{R}$. Wówczas

[ ] $f[f^{-1}[A]] = A$;
[ ] $f^{-1}[f[A]] = A$;
[ ] $f[f^{-1}[A]] \subseteq A$;
[ ] $f[f^{-1}[A]] \supseteq A$,

gdzie $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$, $f^{-1}[A] = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$.

21. Niech $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Wówczas

[ ] $A \in B$;
[ ] $B \in A$;
[ ] $A \subseteq B$;
[ ] $B \subseteq A$.

22. Działanie $\star$ w zbiorze X nazywamy wewnętrznym, jeśli $\star : X \times X \to X$. Prawdziwe jest zdanie

[ ] dzielenie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $\mathbb{Q}^* = \{q \in \mathbb{Q} : q \neq 0\}$;

[ ] potęgowanie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb niewymiernych (tj. czy a^b jest liczbą niewymierną dla dowolnych niewymiernych a, b);

[ ] dodawanie jest działaniem wewnętrznym wśród funkcji różnowartościowych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

[ ] odejmowanie jest działaniem wewnętrznym wśród suriekcji (funkcji "na") $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

23. Mamy danych 2015 jednakowych sześciennych klocków, o boku długości 1. Wykorzystując wszystkie klocki możemy ułożyć:

[ ] prostopadłościan, w którym długość dłuższego boku podstawy stanowi $\frac{93}{39}$ długości krótszego boku tej samej podstawy;

[ ] bryłę o całkowitym polu powierzchni równym 2032;

[ ] bryłę o całkowitym polu powierzchni równym 2027;

[ ] prostopadłościan, dla którego dokładnie jedna liczba we wzorze na objętość ($V = a \cdot b \cdot H$) nie jest liczbą pierwszą.

24. Wiadomo, że medianą zbioru n danych ($n \in \mathbb{N}$) jest liczba 2015. Wówczas

[ ] jeżeli zbiór danych powiększymy o liczbę 2015, to mediana nie ulegnie zmianie;

[ ] jeżeli średnia arytmetyczna tego zbioru danych jest ujemna, to zbiór danych może zawierać więcej liczb ujemnych niż dodatnich

[ ] jeżeli średnia arytmetyczna tego zbioru danych jest równa zero, to zbiór danych może zawierać więcej liczb ujemnych niż dodatnich;

[ ] jeżeli średnia arytmetyczna tego zbioru jest równa zero, to odchylenie standardowe jest mniejsze od 2015^2.

25. Niech $A, B, C \subseteq \{1, 2, ..., 8\}$, gdzie $A = \{1, 2, 6, 7, 8\}, B = \{2, 3, 4, 7, 8\}, C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Rozważmy operacje $\cap, \cup, ^c$ iloczynu, sumy i dopełnienia.

[ ] przy użyciu tych operacji można uzyskać co najmniej 128 różnych zbiorów;

[ ] przy użyciu tych operacji można uzyskać dokładnie 128 różnych zbiorów;

[ ] przy użyciu tych operacji można uzyskać dokładnie 256 różnych zbiorów;

[ ] $\{8\}$ można uzyskać przy użyciu tych operacji.

26. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = (a_1 \cdot x + b_1)^2 + ... + (a_n \cdot x + b_n)^2$, dla pewnych $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$. oraz istnieje $i \in \{1, ..., n\}$, takie że $a_i \neq 0$. Wówczas

[ ] f może mieć dwa miejsca zerowe;

[ ] wyróżnik równania $f(x) = 0$ może być ujemny;

[ ] wyróżnik równania $f(x) = 0$ może być równy 0;

[ ] wyróżnik równania $f(x) = 0$ musi być niedodatni.

27. Niech $n, p, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $n \geq p \geq k$. Wówczas

[ ] $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 0$;

[ ] jeśli p jest liczbą pierwszą i $k \geq 1$, to liczba $\binom{p}{k}$ jest podzielna przez p;

[ ] jeśli $k \geq 1$, to $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n-1}{k-1}$;

[ ] $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \cdot \binom{p}{k}$.

28. Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prawdziwe jest zdanie

[ ] jeśli f, g są okresowe, to $f \circ g$ też jest okresowa;
[ ] jeśi g jest okresowa, to $f \circ g$ jest okresowa;
[ ] jeśli f jest okresowa, to istnieje przedział $I \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $f[I] = f[\mathbb{R}]$;
[ ] jeśli f jest okresowa, to istnieje najmniejsza liczba $T > 0$ będąca okresem f.

29. Liczba $p \in \mathbb{N}$ ma własność (A) jeśli pośród cyfr jedności liczb $p, 2p, 3p, 4p, ...$ występują wszystkie cyfry $0, 1, ..., 9$. Prawdziwe jest zdanie

[ ] jeśli $p > 1$ ma własność (A) to musi być liczbą pierwszą;
[ ] jeśli p ma własność (A) to $p \in \{1, 3, 7, 9\}$;
[ ] jeśli p ma własność (A) to p jest względnie pierwsza z 10;
[ ] jeśli p jest względnie pierwsza z 10, to ma własność (A).

30. Prawdziwe jest zdanie

[ ] $\forall_{q \in \mathbb{Q}} \exists_{p \in \mathbb{Z}} \quad p \cdot q \in \mathbb{N}$;
[ ] $\exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad k \leq n$;
[ ] $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} \quad x < 2x < n$;
[ ] $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \exists_{q \in \mathbb{Q}} \quad 2q - x = y$.