VII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie Matematyki"

im. Prof. Włodzimierza Krysickiego

Etap drugi - 17 lutego 2015 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 4 zadań z treścią oraz 3 zadań z matematyki wyższej - do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań jest następująca:
   - Zadanie 1: a) 6 punktów, b) 3 punkty,
   - Zadanie 2: a) 6 punktów, b) 4 punkty,
   - Zadanie 3: a) 4 punkty, b) 6 punktów,
   - Zadanie 4: 8 punktów,
   - Zadanie 5: a) 7 punktów, b) 7 punktów,
   - Zadanie 6: a) 2, b) 2, c) 5, d) 4, e) 2,
   - Zadanie 7: a) 8 punktów, b) 6 punktów.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z „Zestawu wybranych wzorów matematycznych” wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Zadanie 1. Przypomnijmy, że dla ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych i $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0} \quad |x_n - x| < \varepsilon;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall_{M>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n\geq n_0} \quad x_n > M.$$

(a) Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Wykaż, że istnieje ściśle rosnący ciąg liczb nieujemnych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n x_n = 0$.

(b) Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ściśle malejącym ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Wykaż, że istnieje ściśle rosnący ciąg liczb nieujemnych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oraz $(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ściśle malejący i $\lim_{n\to\infty} a_n x_n = 0$.

Zadanie 2. Rozważmy 28 kostek domina. Każdą z nich utożsamiamy z parą nieuporządkowaną (i, j), gdzie $i, j \in \{0, ..., 6\}$. O kostkach A - odpowiadającej parze (k, l) oraz B - odpowiadającej parze (m, n) powiemy, że pasują do siebie, gdy $k = m$ lub $k = n$ lub $l = m$ lub $l = n$.

(a) Na ile sposbów można wylosować dwie pasujące do siebie kostki?

(b) Wylosowano dwie kostki pasujące do siebie i połączono je. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania trzeciej kostki, którą można dołączyć do poprzednich bez ich rozdzielania?

Zadanie 3.

(a) Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

(b) Wykazać, że jeśli między współczynnikami równań $x^2+px+q = 0$ i $x^2+mx+n = 0$ zmiennej rzeczywistej x oraz parametrów rzeczywistych p, q, m, n, zachodzi związek $mp = 2(n+q)$, to przynajmniej jedno z tych równań ma rozwiązanie.

Zadanie 4. Rozważmy trójkąt ABC, dla którego spełnione są następujące warunki:

$$|AD| : |BD| = \frac{2}{5}, \quad |CE| : |BE| = \frac{3}{4},$$

gdzie D jest punktem należącym do odcinka AB, zaś E jest punktem należącym do odcinka BC oraz $P_{ABC} = S$. Załóżmy, że odcinki AE oraz CD przecinają się w punkcie F. Oblicz pole trójkąta ACF.

Zadanie 5. **Gracz 1** i **Gracz 2** grają w grę NIM, polegającą na tym, że na zmianę z wybranej kupki kamieni zabierają dowolną, dodatnią liczbę kamieni. Wygrywa ten gracz, który zbierze ostatni kamień. Grę rozpoczyna **Gracz 1** - w tym momencie są 4 kupki liczące odpowiednio $3, 7, 9$ i 13 kamieni.

(a) Zakładając, że gracze grają perfekcyjnie rozstrzygnąć, który gracz wygra. Jeśli wygrywa **Gracz 1** podać wszystkie możliwe, wygrywające ruchy. Jeśli wygrywa **Gracz 2** - podać wszystkie wygrywające odpowiedzi na zebranie przez **Gracza 1** trzech kamieni z kupki liczącej ich 13.

(b) Co by się zmieniło, gdyby gracze mogli pobierać maksymalnie 4 kamienie? Udzielić odpowiedzi analogicznej do punktu (a): podać, który gracz wygra i jeśli wygrywa **Gracz 1** podać wszystkie możliwe, wygrywające ruchy, a jeśli **Gracz 2** - podać wszystkie odpowiedzi na zebranie 3 kamieni z kupki liczącej ich 13.

Definicja. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiujemy następujące działania

$$\alpha \cdot A = \{\alpha \cdot x : x \in A\},$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Przykład. Niech $A = [0, 1], B = \{2\}$ oraz $\alpha = 3$. Mamy

$$\alpha \cdot A = [0, 3],$$

$$\alpha \cdot B = \{6\},$$

$$A + B = \{a + b : a \in [0, 1], b \in \{2\}\} = \{a + 2 : a \in [0, 1]\} = [2, 3].$$

Uwaga. Podobnie jak wyżej, dla $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$\alpha \cdot A = \{(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) : (x, y) \in A\}.$$

Niech $X = \mathbb{R}$ lub $X = \mathbb{R}^2$.

Definicja. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy:

- **symetrycznym**, jeśli $(-1) \cdot A = A$;
- **zbalansowanym**, jeśli $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad |\alpha| \leq 1 \implies \alpha \cdot A \subseteq A$;
- **wypukłym**, jeśli $\forall_{t \in [0,1]} \forall_{a,b \in A} \quad t \cdot a + (1 - t) \cdot b \in A$.

Zadanie 6.

(a) Wykaż, że dla każdego $A \subseteq \mathbb{R}$ mamy $2 \cdot A \subseteq A + A$.

(b) Wskaż przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, dla którego **nieprawdą** jest, że $A + A \subseteq 2 \cdot A$.

(c) Niech $A \subseteq X$ ($X = \mathbb{R}$ lub $X = \mathbb{R}^2$). Wykaż, że jeśli A jest symetryczny i wypukły, to jest zbalansowany.

(d) Wykaż, że dla $X = \mathbb{R}$ implikację w (c) można odwrócić.

(e) Wskaż przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$, który świadczy o tym, że implikacji w (c) **nie** można odwrócić dla $X = \mathbb{R}^2$.

Definicja. Funkcją akumulacji nazywamy dowolną niemalejącą i prawostronnie ciągłą funkcję $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, taką, że $a(0) = 1$.

Funkcja akumulacji wykorzystywana jest w matematyce finansowej do wyliczania przyszłej wartości, po czasie $t \geq 0$, jednej jednostki monetarnej zainwestowanej w chwili 0. Jednostka, w której mierzymy czas, nazywana jest okresem bazowym - może być to na przykład dzień, miesiąc, kwartał lub rok. W praktyce najczęściej korzysta się z funkcji akumulacji postaci $a(t) = (1 + i)^t$ (procent składany), wraz z okresem bazowym równym jeden rok, gdzie i jest stopą oprocentowania dla jednego okresu bazowego. Jej działanie opiera się na tym, że odsetki za każdy kolejny okres bazowy doliczane są do kwoty kapitału i stanowią podstawę do naliczenia kolejnych odsetek. Aby obliczyć wartość przyszłą kwoty $K > 0$ w chwili $t \geq 0$ wystarczy wyznaczyć $K \cdot a(t)$.

Przykład. Rozważmy pięcioletnią inwestycję w banku, który oferuje stopę oprocentowania $i = 5$ %. w skali roku. W chwili 0 wpłacamy na konto kwotę 1000 zł. Zgodnie ze wzorem obliczamy wartość przyszłą:

$$K \cdot a(5) = 1000 \cdot (1 + 0.05)^5 \approx 1276,28$$

Wielkość $(1+i)$ nazywamy czynnikiem akumulującym. Aby zakumulować daną kwotę w dowolnej chwili $t \geq 0$ o jeden okres bazowy, wystarczy pomnożyć ją przez czynnik akumulujący.

Przykład. Załóżmy, że za pięć lat będziemy potrzebowali kwoty 5000 zł. Ile pieniędzy musimy wpłacić dzisiaj do banku oferującego te same warunki, co w poprzednim przykładzie?

$$K \cdot a(5) = K \cdot (1 + 0.05)^5 = 5000 \implies K = 5000 \cdot \frac{1}{(1 + 0.05)^5} \approx 3917,63$$

Wielkość $v = \frac{1}{(1+i)}$ nazywamy czynnikiem dyskontującym. Aby obliczyć kwotę, którą należy wpłacić w dowolnej chwili $t \geq 0$ aby po jednym okresie bazowym otrzymać ustaloną kwotę, należy pomnożyć ją przez czynnik dyskontujący. Takie działanie nazywa się dyskontowaniem.

Definicja. Rentą kapitałową pewną nazywamy ciąg płatności (skończony lub nieskończony) dokonywanych w równych odstępach czasu, które nazywane są okresami wypłat.

Definicja. Wartością obecną renty nazywamy sumę wszystkich jej płatności zdyskontowanych na chwilę 0. Jest to kwota, którą należy zainwestować na początku inwestycji, aby zrealizować wypłaty przewidziane w rencie.

Przykład. Rozważmy dziesięcioletnią rentę, wypłacającą na koniec każdego roku kwotę 1. Obliczamy wartość obecną takiej renty przy stopie procentowej 10%.

$$PV = 1 \cdot v + 1 \cdot v^2 + \ldots + 1 \cdot v^{10} = v \cdot \frac{1 - v^{10}}{1 - v} = \frac{1 - v^{10}}{i} \approx 6,14$$

Zadanie 7. Kredyt o wartości K będzie spłacony w ciągu 20 lat, ratami płatnymi na końcu każdego roku, przy czym wiadomo, że:

- Roczna stopa oprocentowania kredytu wynosi 10%.
- Wysokość pierwszej raty wynosi 1100 zł.
- Każda rata, począwszy od drugiej, jest większa od poprzedniej o 100 zł.

Przy spłacie kredytu obowiązuje zasada równoważności długu i jego spłaty, co oznacza, że kwota kredytu K równa jest wartości obecnej wszystkich rat.

(a) Oblicz kwotę kredytu K.

(b) Oblicz sumaryczną kwotę odsetek zapłaconych przez cały okres spłaty kredytu.

Uzyskane wyniki należy zaokrąglić do dwóch miejsc po przecinku.