XI Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W Świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap drugi - 26 lutego 2019 r.

Maksymalna liczba punktów do zdobycia: 80.

1. Drugi etap Konkursu składa się z 7 zadań z treścią, w tym 3 zadań z matematyki wyższej - do zadań tych dołączone są definicje, twierdzenia i przykłady pomocne w ich rozwiązywaniu.
2. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za każde z zadań podana jest przy jego numerze.
3. Zabrania się korzystania z korektora.
4. Dozwolone jest korzystanie z "Zestawu wybranych wzorów matematycznych" wydawanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
5. Zabrania się korzystania z kalkulatora.
6. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnej pracy uczestnika Konkursu (poza korzystaniem z tablic matematycznych wymienionych w punkcie 4.) zostaje on wykluczony z Konkursu.

Zadanie 1 (6 pkt.).
W sześcian o krawędzi c wpisano kulę K. Wyznaczyć promień kuli K_1 stycznej zewnętrznie do kuli K oraz do trzech ścian sześcianu.

Zadanie 2 (8 pkt.).
Zadania do wykonania (5p + 3p):

(I) Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste, które dają się jednoznacznie przedstawić jako iloczyn dwóch liczb dodatnich, takich, że różnica ich logarytmów o podstawie 2 jest równa ilorazowi tych logarytmów.

(II) Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość wyrażenia $a \sin x + b \cos x$ przy ustalonych $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3 (12 pkt.).
Zadania do wykonania (5p + 7p):

(I) Wykazać, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$ spełniają równania $x + y + z = xyz, x^2 = yz$ oraz $x \neq 0$, to $x^2 \geq 3$.

(II) Liczby rzeczywiste $x_1, ..., x_n$ są takie, że $x_1 + ... + x_n = 0$ oraz $x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$. Wykazać, że wśród tych liczb są dwie, których iloczyn jest nie większy od $\frac{-1}{n}$.

Zadanie 4 (14 pkt.).

Definicja 1. Powiemy, że podzbiór $I \subset \mathbb{R}$ jest *przedziałem domkniętym*, jeżeli jest on jednej z postaci: $I = [a, b]$, $I = [a, \infty)$, $I = (-\infty, a]$, $I = \mathbb{R}$, gdzie $a < b$.

Definicja 2. Niech I będzie przedziałem domkniętym i $f : I \to I$. Powiemy, że f jest odwzorowaniem *zwężającym*, jeżeli istnieje $\alpha < 1$ taka, że dla dowolnych $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

Przykład 3. Funkcja f dana wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x$ dla $x \in [0, \infty)$ jest odwzorowaniem zwężającym. Istotnie:
- dla dowolnego $x \in [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2}x \in [0, \infty)$, zatem $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$;
- dla dowolnych $x, y \in [0, \infty)$,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2} |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y| .$$

Twierdzenie 4. *Niech I będzie przedziałem domkniętym oraz $f : I \to I$ będzie różniczkowalna (na ewentualnych krańcach I rozważamy pochodne jednostronne). Jeżeli dla pewnego $\alpha < 1$ zachodzi*

$$\forall_{x \in I} \, |f'(x)| \leq \alpha,$$

to f jest odwzorowaniem zwężającym.

Uwaga 5. Poniżej zakładamy, że f jest zdefiniowana na pewnym przedziale domkniętym I oraz $A, B, C \in \mathbb{R}$ i $k, l \geq 1$.

- jeżeli $f(x) = A + Bx^k + Cx^l$, to $f'(x) = Bkx^{k-1} + Clx^{l-1}$
- jeżeli $f(x) = \sqrt{A+x}$, to $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{A+x}}$

Przykład 6. Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \frac{1}{15}x^3$ dla $x \in [0,2]$. Łatwo widać, że dla $x \in [0,2]$, $f(x) \in [0,2]$, czyli $f : [0,2] \to [0,2]$. Jednocześnie dla dowolnego $x \in [0,2]$, $|f'(x)| = |\frac{3}{15}x^2| \leq \frac{12}{15}$. Wobec Twierdzenia 4, f jest odwzorowaniem zwężającym.

Twierdzenie 7. *(Zasada Banacha)*
Jeżeli I jest przedziałem domkniętym oraz $f : I \to I$ jest odwzorowaniem zwężającym, to f posiada dokładnie jeden punkt stały x_*, tj. jedyny punkt $x_* \in I$ spełniający:

$$x_* = f(x_*).$$

Dodatkowo, dla dowolnego $x_0 \in I$, ciąg (x_n) zdefiniowany przez:

$$x_{n+1} := f(x_n) \ \ dla\ n \geq 1$$

jest zbieżny do x_0.

Zasada Banacha może być wykorzystana do badania zbieżności ciągu zadanego rekurencyjnie.

Przykład 8. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie zdefiniowany poniższą rekurencją:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}a_n \ \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

tzn. $a_0 = 0$, $a_1 = 1 - \frac{1}{2}a_0 = 1 - \frac{1}{2}0 = 1$, $a_2 = 1 - \frac{1}{2}a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, itd. Pokażemy, że ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny i jego granica wynosi $\frac{2}{3}$.
Dla $x \in [0,1]$, niech $f(x) := 1 - \frac{1}{2}x$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in [0,1]$, mamy:

- $0 \leq 1 - \frac{1}{2}x \leq 1$;
- $|f'(x)| = |-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$,

zatem $f : [0,1] \to [0,1]$ oraz f jest odwzorowaniem zwężającym (na mocy Twierdzenia 4).
Z zasady Banacha wnioskujemy więc, że f ma dokładnie jeden punkt stały x_* i dla dowolnego $x_0 \in [0,1]$, ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ dany przez $x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \frac{1}{2}x_n$, jest zbieżny do x_*.
W szczególności, przyjmując $x_0 := 0$ możemy wywnioskować, że rozważany ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny do x_*. Pozostaje wyznaczyć x_*.
Skoro x_* to punkt stały f, to x_* jest rozwiązaniem równania

$$x_* = f(x_*) = 1 - \frac{1}{2}x_*,$$

czyli, jak łatwo policzymy, $x_* = \frac{2}{3}$. Ostatecznie, ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny do $\frac{2}{3}$.

Zadania do samodzielnego wykonania

Zadanie (4p + 4p + 6p)
Korzystając z zasady Banacha udowodnij, że zdefiniowane rekurencyjnie ciągi $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ są zbieżne i wyznacz ich granice.

(I)
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}(a_n)^2, \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

(II)
$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_{n+1} = \sqrt{3 + b_n}, \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

(III)
$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{n+1} = -\frac{1}{2}(c_n)^2 + c_n + \frac{1}{3}, \quad \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

ZADANIE 5 (13 pkt.).

Przez $\binom{n}{k}$ oznaczmy liczbę $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$. Liczba $\binom{n}{k}$ ma interpretację kombinatoryczną – jest to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Dzięki temu można wykazać pewne równości metodami kombinatorycznymi, które innymi metodami trudno się dowodzi. Rozważmy dla przykładu równość:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{l}{k-i}, \text{ gdzie } m + l = n \text{ i } k \leq \min\{m, l\}.$$

Odpowiedzmy sobie na pytanie: na ile sposobów można wybrać k osób spośród n osób. Wiemy dodatkowo, że wśród tych osób jest m mężczyzn i l kobiet. Z jednej strony wiadomo, że liczba takich sposobów wynosi $\binom{n}{k}$. Z drugiej strony na $\binom{m}{i}\binom{l}{k-i}$ sposobów można wybrać k osób tak, aby wśród nich było i mężczyzn oraz $k - i$ kobiet. Zatem k osób spośród n osób można wybrać na $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{l}{k-i}$ sposobów.

Zadania do samodzielnego wykonania

Zadanie (6p + 7p)

(I) Niech $N, M \in \mathbb{N}$ oraz niech $k \leq \min\{N, M\}$. Udowodnij równości

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{\binom{N}{l}\binom{M}{k-l}}{\binom{N+M}{k}} = 1$$

oraz

$$\sum_{l=0}^{k} l \cdot \frac{\binom{N}{l}\binom{M}{k-l}}{\binom{N+M}{k}} = \frac{kN}{M+N}.$$

(II) Wykazać, że

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l}$$

ZADANIE 6 (14 pkt.).

Europejska opcja kupna jest to kontrakt dający **nabywcy** tej opcji prawo do kupna ustalonej ilości pewnego instrumentu podstawowego (najczęściej akcji) po określonej cenie wykonania K wyłącznie w ustalonym terminie T. **Wystawca** europejskiej opcji kupna ma w chwili T obowiązek sprzedaży (o ile nabywca

będzie zdecydowany na wykonanie opcji, czyli kupno) tej ustalonej ilości instrumentu podstawowego po określonej cenie K.
Od tego momentu zakładamy, że opcja wystawiona jest na akcję niegenerującą dodatkowych przychodów. Ponadto:

1) Oprocentowanie lokat i kredytów jest jednakowe i stałe;
2) Możliwość zaciągania kredytów jest nieograniczona;
3) Zapewniona jest płynność obrotu wszystkimi aktywami;
4) Nie ma kosztów związanych z zawieraniem transakcji;
5) Zyski z inwestycji nie są obciążone podatkami;
6) Wszystkie aktywa są doskonale podzielne.

Funkcja wypłaty europejskiej opcji kupna z ceną wykonania K i terminem wygaśnięcia T przedstawiona jest wzorem $\max\{S_T - K, 0\}$, gdzie S_t oznacza cenę akcji w chwili t.

Przy wyznaczaniu ceny europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję o bieżącej cenie S_0 z ceną wykonania K, zakładamy, że w jednym okresie cena akcji może wzrosnąć o czynnik u albo zmaleć o czynnik d. Spełniona musi być nierówność $d < 1 + r < u$, gdzie $r > 0$ jest efektywną stopą procentową obowiązującą w danym okresie. Przykładowo, ceny akcji w chwili $t = 1$ można opisać następująco:

- $S_1^u = uS_0$, gdy nastąpił wzrost ceny akcji;
- $S_1^d = dS_0$, gdy nastąpił spadek ceny akcji.

Oznaczmy $p := \frac{1+r-d}{u-d} \in [0, 1]$. Wielkość tą nazywamy **prawdopodobieństwem arbitrażowym**. Przyjmijmy oznaczenia:

C_0 – cena europejskiej opcji kupna w chwili $t = 0$;

$$\left.\begin{aligned} C_1^u &= \max\{S_1^u - K, 0\} - \text{wartość europejskiej opcji kupna w chwili } t = 1 \text{ po wzroście ceny akcji;} \\ C_1^d &= \max\{S_1^d - K, 0\} - \text{wartość europejskiej opcji kupna w chwili } t = 1 \text{ po spadku ceny akcji.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Przykład

Załóżmy, że wartość akcji spółki ABC w chwili $t = 0$ wynosi $S_0 = 100$zł oraz na koniec okresu może wzrosnąć o 50% lub zmaleć o 30%. Efektywna stopa procentowa wynosi 20%. Wycenić europejską opcję kupna wystawioną na akcję tej spółki, jeśli termin do wygaśnięcia T wynosi 1, a cena wykonania tej opcji to 110zł.

Rozwiązanie:

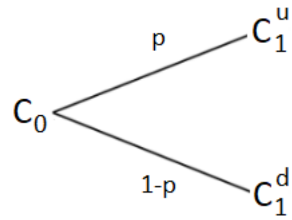
Wiemy, że: $u = 1,5$; $d = 0,7$; $r = 0,2$; $K = 110$ zł.

Stąd $S_1^u = 1,5 \cdot 100$ zł $= 150$ zł; $S_1^d = 0,7 \cdot 100$ zł $= 70$ zł.

Aby wycenić europejską opcję kupna, korzystamy z tzw. drzewa dwumianowego postaci:

Widzimy, że przedstawia ono „trójkąt" o wierzchołkach C_0, C_1^u oraz C_1^d, gdzie z prawdopodobieństwem p wartość europejskiej opcji kupna może wzrosnąć do C_1^u lub z prawdopodobieństwem $1 - p$ zmaleć do C_1^d. Przy wyznaczaniu C_0 musimy uwzględnić oba przypadki.

Wobec tego wyznaczmy p, C_1^u oraz C_1^d:



$p = \frac{1+0,2-0,7}{1,5-0,7} = \frac{5}{8}$,

$C_1^u = \max\{S_1^u - K; 0\} = \max\{100 \cdot 1,5 - 110; 0\} = 40,$

$C_1^d = \max\{S_1^d - K; 0\} = \max\{100 \cdot 0,7 - 110; 0\} = 0.$

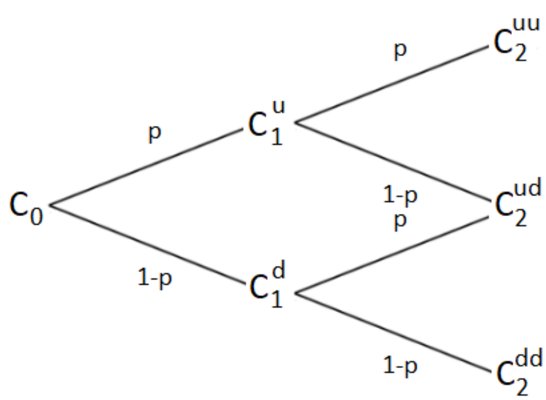
Aby wyznaczyć cenę europejskiej opcji kupna na chwilę $t = 0$, należy skorzystać ze wzoru

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\Big(p \cdot C_1^u + (1-p) \cdot C_1^d\Big). \tag{2}$$

Stąd

$$C_0 = \frac{1}{1+0,2}\Big(\frac{5}{8} \cdot 40 + \big(1 - \frac{5}{8}\big) \cdot 0\Big) = \frac{250}{12} \text{ zł.}$$

W przypadku, gdy $T > 1$, postępujemy analogicznie. Poniżej przedstawione jest uogólnione drzewo dwumianowe (w szczególności dla dwóch okresów), gdzie C_2^{uu} oznacza wartość europejskiej opcji kupna po dwóch wzrostach ceny akcji, C_2^{ud} wartość europejskiej opcji kupna po wzroście i spadku ceny akcji, zaś C_2^{dd} wartość europejskiej opcji kupna po dwóch spadkach ceny akcji.



W tym przypadku drzewo zbudowane jest już z większej liczby „trójkątów". Dla przykładu, rozważając „trójkąt" o wierzchołkach C_1^u, C_2^{uu} i C_2^{ud}, wartość C_1^u (czyli wartość europejskiej opcji kupna po wzroście ceny akcji) otrzymamy korzystając ze wzoru (2). Najpierw jednak należy wyznaczyć wartości końcowe C_2^{uu},C_2^{ud} oraz C_2^{dd}, korzystając z analogicznych wzorów do (1).

Zadanie do wykonania (14p): Rozważmy akcję spółki XYZ o cenie bieżącej $S_0 = 120$ PLN. W kolejnych dwóch okresach cena ta może wzrosnąć u-krotnie lub zmaleć o 10%. Na tę akcję wystawiono europejską opcję kupna z ceną wykonania $K = 120$ PLN $(0 < K < 108u)$, trwającą dwa okresy. Wiedząc, że efektywna stopa procentowa w każdym z tych okresów wynosi $r = 5\%$ oraz bieżąca cena tej opcji wynosi $C_0 = 16\,\frac{16}{49}$ PLN ($\frac{800}{49}$ PLN), obliczyć wskaźnik wzrostu u.

Zadanie 7 (13 pkt.). Definicja zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ poprzez zestaw aksjomatów - tzw. **aksjomatyki Peana**:
pojęcia niedefiniowane: 1, pojęcie **przynależności** (oznaczane symbolem $\in$) oraz **następnik** liczby n oznaczany $S(n)$,

(A1) 1 jest liczbą naturalną;
(A2) następnik każdej liczby naturalnej jest liczbą naturalną;
(A3) 1 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej;
(A4) dowolne dwie liczby naturalne mające równe następniki są równe;
(A5) zasada indukcji: *Jeśli X jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ takim, że:*
- $1 \in X$,
- *dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jeśli $n \in X$ to $S(n) \in X$,*

to $X = \mathbb{N}$

(standardowo definiujemy: $2 = S(1), 3 = S(2)$ itd.).
Bazując na powyższej aksjomatyce możemy również zdefiniować naturalne działania: dodawania i mnożenia w zbiorze $\mathbb{N}$.

- Dodawanie: dla $n, m \in \mathbb{N}$ definiujemy $n + 1 = S(n)$ oraz $n + S(m) = S(n + m)$;
- Mnożenie: dla $n, m \in \mathbb{N}$ definiujemy $n \cdot 1 = n$ oraz $n \cdot S(m) = n \cdot m + n$.

Twierdzenie 1. *Jeśli $\mathbb{N}$ jest zbiorem liczb naturalnych zdefiniowanym w aksjomatyce Peana oraz $+$ jest dodawaniem zdefiniowanym jak wyżej, to dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $n + 1 = 1 + n$.*

Dowód. Niech $X = \{n \in \mathbb{N} \colon n + 1 = 1 + n\}$. Wykorzystując $(A5)$ pokażemy, że $X = \mathbb{N}$.

Krok 1. : Zauważmy, że dla $n = 1$ mamy:

$$1 + 1 = 1 + 1.$$

Stąd $1 \in X$.

Krok 2. : Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $n_0 \in X$. Pokażemy, że $S(n_0) \in X$. Mamy:

$$1 + S(n_0) \overset{def+}{=} S(1 + n_0) \overset{n_0 \in X}{=} S(n_0 + 1) = S(S(n_0)) \overset{def+}{=} S(n_0) + 1.$$

Stąd $S(n_0) \in X$.

Podsumowanie: Wobec $(A5)$ $X = \mathbb{N}$ co należało pokazać.

$\square$

Zadania do wykonania (5p +8p):

(I) Wykaż przemienność dodawania liczb naturalnych w aksjomatyce Peana, tj. wykaż, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ zachodzi $n + m = m + n$.
(II) Wykaż łączność dodawania liczb naturalnych w aksjomatyce Peana, tj. wykaż, że dla dowolnych $n, m, k \in \mathbb{N}$ zachodzi $(n + m) + k = n + (m + k)$.