XI Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie Matematyki”
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 25 lutego 2019 r.

W zadaniach przyjmujemy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

1. Dana jest funkcja kwadratowa przechodząca przez początek układu współrzędnych o wierzchołku w punkcie $\left(4\cos\frac{\pi}{3}, (\log_{17} 24)^2\right)$. Oznaczmy przez x_1 oraz x_2 miejsca zerowe tej funkcji, gdzie $x_1 < x_2$. Niech $a > 0$. Wówczas liczba $\frac{\operatorname{tg} x_2 + 2^{x_1} + \pi}{x_1^2 + x_2^2} \cdot x_1 \cdot \log_3 a$ jest równa:

   [ ] a;
   [ ] $5\cos\frac{\pi}{2}$;
   [ ] 0.

2. Grupa uczniów składa się z 13 osób. Czy jest możliwe, aby każda osoba przyjaźniła się z dokładnie pięcioma innymi?

   [ ] Tak;
   [ ] Nie;
   [ ] Nie można jednoznacznie stwierdzić.

3. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

   [ ] Zbiór wartości funkcji $f(x) = -sin^2(x) + 4 \cdot sin(x) + 12$ wynosi $[5, 15]$;
   [ ] Zbiór wartości funkcji $g(x) = \frac{7}{sin^2(x) - sin(x) - 12}$ wynosi $[-\frac{7}{10}, -\frac{4}{7}]$;
   [ ] Zbiór wartości funkcji $h(x) = -\frac{3}{cos(|x|)}$ wynosi $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

4. Z liczb od 1 do 1000 wybieramy te, które są podzielne przez 4 lub 6 lub 7. Takich liczb jest dokładnie:

   [ ] 417;
   [ ] 428;
   [ ] 558.

5. Niech $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolnym wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, a $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją liniową. Wówczas prawdziwym zdaniem jest:

   [ ] wykres wielomianu W przecina się z wykresem funkcji L;
   [ ] wykres wielomianu W przecina się z wykresem funkcji L w n miejscach;
   [ ] wykres wielomianu W przecina się z wykresem funkcji L w co najwyżej n miejscach.

6. Zbiorem potęgowym zbioru X nazywamy zbiór, który zawiera wszystkie podzbiory zbioru X. Zbiorem potęgowym zbioru pustego jest zbiór:

   [ ] $\emptyset$;
   [ ] $\{\emptyset\}$;
   [ ] $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

7. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności przeciwprostokątnej z okręgiem dzieli ją na odcinki o długościach a i b. Wówczas:

   [ ] pole trójkąta jest równe $\frac{a \cdot b}{2}$;
   [ ] pole trójkąta jest równe $a \cdot b$;
   [ ] trójkąt ten jest równoramienny.

8. W trójkącie o polu $\frac{1}{4} \cdot a \cdot b$ dwa boki mają długości a, b. Wówczas długość trzeciego boku wynosi:

[ ] $\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b}$;
[ ] $\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{3}}$;
[ ] $\sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b \cdot \sqrt{3}}$.

9. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{8^{n+1}}{5} = \frac{16}{5} \cdot 2^{3n} - \frac{1}{5}$;
[ ] $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ dla $0 < k \leq n$;
[ ] $5 + 7 + 9 + \cdots + (13 + 4 \cdot n) = 4 \cdot n^2 + 28 \cdot n + 45$.

10. Liczba $2^{2^{2^2}}$ jest równa:

[ ] $(2^2)^{2^2}$;
[ ] $\left(2^{2^2}\right)^2$;
[ ] $2^{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$.

11. Ciąg $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ nazwiemy:

- arytmetycznym, jeżeli istnieją $a, r \in \mathbb{R}$ takie, że $x_k = a + r(k-1)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$;
- geometrycznym, jeżeli istnieją $a, q \in \mathbb{R}$ takie, że $x_k = aq^{k-1}$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Sumą ciągów $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ nazwiemy ciąg $(x_k + y_k)_{k=1}^{\infty}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] Jeżeli ciąg (x_k) jest arytmetyczny, to nie jest geometryczny.
[ ] Suma dwóch ciągów arytmetycznych jest ciągiem arytmetycznym.
[ ] Suma dwóch ciągów geometrycznych jest ciągiem geometrycznym.
[ ] Suma ciągu arytmetycznego i geometrycznego jest ciągiem geometrycznym.

12. Jeżeli A jest podzbiorem liczb rzeczywistych, to mówimy, że działanie (np. dodawanie, mnożenie itp.) jest wewnętrzne w tym zbiorze, gdy dla dowolnych liczb ze zbioru A wynik działania na tych liczbach też należy do zbioru A. Czy prawdą jest, że:

[ ] dodawanie liczb jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb niewymiernych?
[ ] mnożenie liczb jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb naturalnych?
[ ] odejmowanie liczb nie jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb naturalnych?
[ ] mnożenie liczb jest działaniem wewnętrznym w zbiorze liczb niewymiernych?

13. Czy poniższe wyrażenia są symbolami nieoznaczonymi?

[ ] 0^0;
[ ] $\frac{0}{\infty}$;
[ ] 0^{∞};
[ ] $0 \cdot \infty$.

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ jest podzielna przez:

[ ] 7;
[ ] 13;
[ ] 19;
[ ] 23.

15. Ile jest możliwości usadzenia 5 różnych osób na 8 różnych krzesłach?

[ ] $\binom{8}{3}$;
[ ] $\binom{8}{5} \cdot 5!$;
[ ] $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$;
[ ] $\binom{8}{3} \cdot 5!$.

16. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie daną funkcją, zaś $A \subset \mathbb{R}$ i $B \subset \mathbb{R}$ zbiorami. Wówczas, jeżeli oznaczymy $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$, to zachodzi:

[ ] $f(A \cap B) \subset f(A) \cup f(B)$;
[ ] $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$;
[ ] $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$;
[ ] Jeżeli $f(A) \subset f(B)$, to $A \subset B$.

17. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą. Jeżeli $f(0) = -1$ oraz $f(1) = 1$, to:

[ ] funkcja f ma przynajmniej jedno miejsce zerowe;
[ ] funkcja f nie może mieć nieskończenie wielu miejsc zerowych;
[ ] funkcja f może mieć dokładnie 2 miejsca zerowe;
[ ] wszystkie miejsca zerowe funkcji f znajdują się w zbiorze $(0,1)$.

18. Ile jest parzystych liczb pięciocyfrowych o pięciu różnych cyfrach?

[ ] $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4$;
[ ] $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (9 + 8 \cdot 4)$;
[ ] $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$;
[ ] $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

19. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą. Przez a_n oznaczmy resztę z dzielenia n przez k. Wówczas:

[ ] Ciąg (a_n) jest rosnący;
[ ] Ciąg (a_n) może być niemalejący;
[ ] Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_{n+k} = a_n$;
[ ] Jeżeli $b_n = a_{kn}$, to ciąg (b_n) jest zbieżny do 0.

20. Na stole leży 30 zapałek i pudełko. Zawodnicy A i B grają w grę, w której przekłada się zapałki do pudełka. Obowiązują następujące zasady:
 1. Gracze wrzucają zapałki na zmianę,
 2. W każdym ruchu gracz musi wrzucić do pudełka jedną, dwie lub trzy zapałki,
 3. Wygrywa gracz, który wrzuci ostatnie zapałki do pudełka.
Zaczyna gracz A. Czy poniższe zdania są prawdziwe?

[ ] Jeżeli gracz A wrzucił w pierwszym ruchu jedną zapałkę, to istnieje strategia postępowania, dzięki której gracz B na pewno wygra grę.
[ ] Jeżeli gracz A wrzucił w pierwszym ruchu dwie zapałki, to istnieje strategia postępowania, dzięki której gracz B na pewno wygra grę.
[ ] Jeżeli gracz A wrzucił w pierwszym ruchu trzy zapałki, to istnieje strategia postępowania, dzięki której gracz B na pewno wygra grę.
[ ] Istnienie (lub nieistnienie) strategii, dzięki której gracz B na pewno wygra grę, nie zależy od pierwszego ruchu gracza A.

21. Liczba $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ jest:

[ ] mniejsza od $\sqrt{2}$;
[ ] równa 2;
[ ] niewymierna;
[ ] równa $2\sqrt{6}$.

22. Dany jest zbiór $B = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge m < n\}$. Wówczas:

[ ] w zbiorze B istnieje element najmniejszy;
[ ] w zbiorze B nie istnieje element największy;
[ ] zbiór B nie jest ograniczony;
[ ] żadne z powyższych zdań nie jest prawdziwe.

23. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest:

[ ] parzysta;
[ ] nieparzysta;
[ ] okresowa;
[ ] okresowa, a okresem podstawowym jest każda liczba rzeczywista.

24. Niech $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ i $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ będą ciągami takimi, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. Wówczas:

[ ] $\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \neq \emptyset$;
[ ] $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$;
[ ] $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = [a, b]$ dla pewnych $a < b$;
[ ] $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

25. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] Ostatnią cyfrą liczby 17^{2019} jest 1.
[ ] $5|(3^{18} + 6^{17})$.
[ ] Liczba 10^{1000} jest większa niż 999^{333}.
[ ] Liczba $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4$ ma 43 dzielniki.

26. Siedmiu grzybiarzy zebrało łącznie 707 grzybów. Okazało się, że każdy zebrał inną ich liczbę, a grzybiarz, który zebrał ich najwięcej, miał o sześć grzybów więcej niż ten, który zebrał ich najmniej. Ile grzybów zebrał rekordzista?

[ ] 107;
[ ] 105;
[ ] 104;
[ ] 98.

27. Pewne dwie podobne figury (nie wyróżniamy ich kolejności) mają pola powierzchni 2 i 8. Jaka jest ich skala podobieństwa?

[ ] 2;
[ ] $\frac{1}{2}$;
[ ] 4;
[ ] $\frac{1}{4}$.

28. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] Każda funkcja ciągła jest różniczkowalna.
[ ] Funkcja dana wzorem $y = -|x|$ jest różniczkowalna.
[ ] Funkcja dana wzorem $y = \operatorname{tg} x$ jest nieciągła w punkcie $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
[ ] Jeżeli funkcja jest różniczkowalna, to jest ciągła.

29. Walec można utworzyć poprzez obrót pewnego:

[ ] prostokąta;
[ ] kwadratu;
[ ] deltoidu;
[ ] rombu.

30. Jeżeli p, q i r są zdaniami logicznymi, to tautologią jest zdanie:

[ ] $(p \vee q) \Rightarrow p \wedge (q \wedge \sim p)$;
[ ] $(p \Rightarrow (r \wedge \sim p)) \Leftrightarrow (q \vee r) \wedge (\sim p)$;
[ ] $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow r \wedge ((\sim p) \vee q)$;
[ ] $p \wedge \sim q \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \vee p))$.