XII Wojewódzki Konkurs Matematyczny "W świecie Matematyki"
im. Prof. Włodzimierza Krysickiego
Etap pierwszy - 27 lutego 2020 r.

W zadaniach przyjmujemy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

1. Dla pewnej wartości parametru m, iloczyn różnych miejsc zerowych funkcji f określonej wzorem $f(x) = (\log_2 x)^2 - (m^2 - m)\log_8 x^3 + 1 - m$ jest równy 4. Wówczas:

   [ ] $m^2 - m - 2 = 0$.
   [ ] $m = -1$.
   [ ] $m = -2$.

2. Zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{x-2}{mx^2+mx+1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych, jest:

   [ ] $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$;
   [ ] $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$;
   [ ] $(0, 4)$.

3. Współrzędne punktu leżącego na paraboli o równaniu $y = x^2 - 8x + 16$ położonego najbliżej punktu $P = (1, 0)$ to:

   [ ] $(1, 9)$;
   [ ] $(2, 4)$;
   [ ] $(3, 1)$.

4. Rozważmy trójkąt prostokątny ABC.

   [ ] Wysokość h opuszczona na przeciwprostokątną AB dzieli ją na dwa odcinki AD i DB. Wtedy $h^2 = |AD| \cdot |DB|$.
   [ ] Środkowa opuszczona na przeciwprostokątną AB dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne.
   [ ] Wysokość opuszczona na przeciwprostokątną AB ma długość $\frac{|AC|\cdot|CB|}{|AB|}$.

5. Czy prawdziwe są poniższe zdania?

   [ ] W trójkącie prostokątnym o bokach $a \leq b < c$ zachodzi $a + b \leq \sqrt{2}c$.
   [ ] W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest mniejsza od połowy przeciwprostokątnej.
   [ ] Maksymalny obwód trójkąta prostokątnego, który ma przeciwprostokątną długości c wynosi $(2 + \sqrt{2}) \cdot c$.

6. Dany jest ciąg liczbowy postaci $(1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, x)$, którego różnice kolejnych wyrazów stanowią ciąg arytmetyczny. Wówczas x jest równe:

   [ ] 35;
   [ ] 37;
   [ ] 39.

7. Z urny w której znajduje się 15 kul białych i 10 czarnych losujemy na raz dwie kule. Prawdopodobieństwo, że wylosowane kule będą tego samego koloru wynosi:

   [ ] $\frac{\binom{15}{2}+\binom{10}{2}}{\binom{25}{2}}$;
   [ ] $\frac{1}{2}$;
   [ ] $\frac{14\cdot 9}{2} + \frac{15\cdot 10}{2}$.

8. Rzucamy sześć razy kostką sześcienną. Prawdopodobieństwo, że wyrzucimy dokładnie jeden raz taką samą liczbę oczek trzy razy z rzędu wynosi:

   [ ] $\frac{115}{1296}$;
   [ ] $\frac{55}{648}$;
   [ ] $\frac{35}{432}$.

9. Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, o którym wiadomo, że $\angle BAD = 90°$, $\angle ADC = 90°$, $\angle BCD$ jest większy od $\angle CBA$, w który wpisano okrąg o środku S. Jeżeli $\overline{BS} = 4.5$ oraz $\overline{AS} = 3$, wówczas w zaokrągleniu do części całkowitych:

   [ ] $\lfloor \overline{BC} \rfloor = 6$ i $\lfloor \overline{DC} \rfloor = 3$.
   [ ] $\overline{SC} = 2$ i jedna z wysokości trójkąta $\Delta BSC = 2$.
   [ ] $\lfloor \overline{BC} \rfloor = 5$ i $\lfloor \overline{DC} \rfloor = 3$.

10. Załóżmy, że $P(A) = 0.4$, $P(B \mid A) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.6$, $P(C \mid A \cap B) = 0.5$. Wówczas $P(A \cap B \cap C)$ wynosi:

    [ ] 0.05;
    [ ] 0.06;
    [ ] 0.325.

11. Czy prawdziwe są poniższe równości?

    [ ] $\sqrt{2} = \frac{\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^2} - (1-\sqrt{2})^2}{1+(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdot(\log_5 6)\cdot(\log_6 7)\cdot(\log_7 8)}$;
    [ ] $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}}}}$;
    [ ] $\sqrt{2} = \frac{99}{70} + \frac{1}{-6930-4900\sqrt{2}}$;
    [ ] $\sqrt{2} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Wielomian $W(x) = x^3 - \frac{1}{\sqrt{2}+1}x^2 + (1-\sqrt{2})x - 2$

    [ ] ma dokładnie jeden pierwiastek.
    [ ] ma dokładnie dwa pierwiastki.
    [ ] ma pierwiastek podwójny.
    [ ] jest funkcją rosnącą na zbiorze $\mathbb{R}$.

13. Czy prawdziwe są zdania?

    [ ] Boki ΔABC są równe a, b, c. Wówczas długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka A do boku a wynosi $\frac{\sqrt{2b^2-a^2+c^2}}{2}$.
    [ ] Na trapezie opisano okrąg, którego średnica jest jedną z podstaw trapezu. Przekątna trapezu ma długość 12, a obwód okręgu wynosi 13π. Wówczas pole trapezu wynosi $51\frac{21}{169}$.
    [ ] Istnieje prostokąt o bokach długości a, b, gdzie $a \neq b$ podobny do prostokąta o bokach długości $a+5$, $b+5$.
    [ ] Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny o podstawach x, $4x$. Wówczas $r = 2x$.

14. W pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzą równości $a_k = m$ i $a_m = k$, gdzie k i m są różnymi liczbami naturalnymi. Wtedy:

[ ] $a_{k+m} = 2(k+m)$;
[ ] $a_{k+m} = k+m$;
[ ] $a_{k+m} = \frac{1}{2}(k+m)$;
[ ] $a_{k+m} = 0$.

15. Oceń prawdziwość poniższych zdań:

[ ] $\emptyset$ jest podzbiorem każdego zbioru.
[ ] $\emptyset \notin \emptyset$.
[ ] $\emptyset \subset \{\emptyset, 1\}$.
[ ] $\emptyset \in \{\emptyset, 1\}$.

16. Czy dane zdanie jest prawdziwe?

[ ] Zbiory równe mają tyle samo elementów.
[ ] $\{1,1,1,2,3\} = \{1,2,3\}$.
[ ] Zbiór $\{\Phi, \{\Phi, \Phi\}, \Phi, \Phi, \{\Phi\}\}$ składa się z trzech elementów.
[ ] Jedynym elementem zbioru $\{\{\Phi\}\}$ jest Φ.

17. Czy prawdą jest, że:

[ ] $(1+\sqrt{2})^5 = 41 + 29\sqrt{2}$;
[ ] $(1+\sqrt{3})^5 = 41 + 29\sqrt{3}$;
[ ] $(1+\sqrt{5})^5 = 41 + 29\sqrt{5}$;
[ ] $(1+\sqrt{7})^5 = 41 + 29\sqrt{7}$.

18. Niech $n, k \in \mathbb{N}$, gdzie $n \geq k+1$. Wtedy $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ jest równe:

[ ] $\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$;
[ ] $\frac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!}$;
[ ] $\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$;
[ ] $\frac{(n+1)!}{(k+2)!(n-k-2)!}$.

19. W trakcie gry w pokera wyciągamy (bez zwrotu) 5 kart z talii składającej się z 52. Jednym z układów kart w pokerze jest tzn. full house. Polega on na wyciągnięciu "trójki" (trzech kart o tej samej wartości) oraz "pary" (dwóch kart o tej samej wartości). Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania powyższego układu przez jednego gracza?

[ ] $\frac{156\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$;
[ ] $\frac{13\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$;
[ ] $\frac{13 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$;
[ ] $\frac{156 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$.

20. Ile jest liczb pięciocyfrowych, które w zapisie dziesiętnym nie posiadają "0", mają dokładnie jedną "7" i dokładnie jedną cyfrę parzystą?

[ ] 2150;
[ ] 5120;
[ ] 2510;
[ ] 1520.

21. Układ równań $\begin{cases} a+b+c+d+e=20 \\ abcde=20 \end{cases}$ z niewiadomymi a, b, c, d, e:

[ ] nie ma rozwiązania w zbiorze liczb naturalnych.
[ ] nie ma rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych.
[ ] nie ma rozwiązania w zbiorze liczb wymiernych.
[ ] nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.

22. Dany jest kwadrat o boku a, w który wpisano okrąg o promieniu r oraz opisano na nim okrąg o promieniu R. Prawdą jest, że:

[ ] Pole większego okręgu jest 4 razy większe od mniejszego.
[ ] Pole większego okręgu jest $\sqrt{2}$ razy większe od mniejszego.
[ ] Pole większego okręgu jest 2 razy większe od mniejszego.
[ ] Pole mniejszego okręgu jest $\sqrt{\sqrt{16}}$ razy mniejsze od większego.

23. Rzucamy 15 razy kostką szesnastościenną, której ścianki są ponumerowane liczbami naturalnymi od 1 do 16. Wiadomo, że suma oczek we wszystkich rzutach wyniosła 39. Wówczas:

[ ] iloczyn wyrzuconych może być równy 3840.
[ ] jeśli a i b są wartościami, które wypadły odpowiednio n i m-krotnie, przy czym $n+m=15$, to możliwe jest, że $(a \cdot b)! = 5040$.
[ ] Jeżeli pominiemy założenie o sumie, to iloczyn wyrzuconych oczek może być równy 2875932573696000.
[ ] wspomnianą sumę można wyrzucić na więcej niż 10000 różnych sposobów.

24. Określ wartość logiczną poniższych zdań:

[ ] W pewnej firmie pracuje 100 osób. Czy wśród tych osób są dwie osoby, które mają taką samą liczbę znajomych wśród pracowników tej firmy? (przyjmujemy, że jeżeli X zna Y, to również Y zna X)
[ ] W klasie humanistycznej 15 osób posiada konto na facebooku. Czy możliwe, że każda z nich ma wśród znajomych dokładnie pięć osób z klasy?
[ ] W pewnym królestwie z każdego miasta wychodzą trzy drogi. Czy w tym królestwie może być 100 dróg?
[ ] Na pewnym jeziorze jest 9 wysp. Z każdej wyspy wychodzi $1, 3$ lub 5 mostów. Czy któryś most łączy wyspę z brzegiem jeziora?

25. Z kartki w kształcie kwadratu o boku 10 cm

[ ] można wyciąć tyle kół, aby suma ich średnic wynosiła 100 m.
[ ] można wyciąć trójkąt o wysokości 11 cm.
[ ] można wyciąć dwa trójkąty których suma wysokości będzie wynosiła więcej niż 21 cm.
[ ] można wyciąć cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych równych 5 cm, tak aby powstał kwadrat o boku równym $5\sqrt{2}$cm.

26. Czy poniższe zdania są prawdziwe?

[ ] Liczba 144 ma nieparzystą liczbę dzielników naturalnych.
[ ] $7^{18} + 9^{14}$ jest podzielna przez 5.
[ ] Ostatnią cyfrą liczby 3^{2020} jest 9.
[ ] Reszta z dzielenia 5^{100} przez 3 wynosi 2.

27. Liczbą doskonałą nazywamy liczbę naturalną, która jest sumą wszystkich swoich dzielników właściwych. Czy poniższe zdania są prawdziwe?

[ ] Najmniejszą liczbą doskonałą jest liczba 6.
[ ] 12 jest liczbą doskonałą.
[ ] 14 jest liczbą doskonałą.
[ ] 8128 jest liczbą doskonałą.

28. Na kartce zostały zapisane potęgi 2^{2012} i 5^{2012} w systemie dziesiętnym. Ile cyfr łącznie jest napisanych na tej kartce?

[ ] 2013;
[ ] 2012;
[ ] 2011;
[ ] 2010.

29. Niech (x, y, z) będzie rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 11 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$. Wówczas:

[ ] x, y, z są liczbami całkowitymi.
[ ] $xyz > 0$.
[ ] x, y, z są liczbami pierwszymi.
[ ] x, y, z są liczbami doskonałymi.

30. Standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem: $(x_1, \ldots, x_n) \bullet (y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$. Wówczas:

[ ] Standardowy iloczyn skalarny jest symetryczny, tj. $x \bullet y = y \bullet x$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$.
[ ] Zachodzi warunek $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$ dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.
[ ] $x \bullet x \geq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$.
[ ] Jest niezdegenerowany, tj. $x \bullet x = 0 \Rightarrow x = \theta$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\theta = (0, \ldots, 0)$ jest wektorem zerowym.